Stručni rad

UDK:621.317.33 : 528.06
BIBLID: 0350-8528(2010),20.p. 121-141

Procena merne nesigurnosti pri merenju otpornosti indirektnom metodom

Jelena Delić[1], Ljubiša Nikolić[1]

[1]Elektrotehnički institut „Nikola Tesla“, Koste Glavinića 8 a
11000 Beograd, Srbija
jelena.delic@ieent.org, ljubisa.nikolic@ieent.org

Kratak sadržaj: U radu su opisani osnovni faktori i izvori merne nesigurnosti. Detaljno je opisan postupak procene merne nesigurnosti za metodu indirektnog merenja otpornosti. Takođe je dat i primer procene merne nesigurnosti za ovu metodu.

Ključne reči: merna nesigurnost, indirektno merenje, otpornost

1. Uvod

Uopšte gledajući merenje je nesavršeno, sa mnogim potencijalnim izvorima grešaka u rezultatu. Klasičan pristup polazi od pretpostavke da merenjem određujemo pravu vrednost merene veličine i njene greške koje mogu biti slučajne ili sistematske prirode. Kako je praktično nemoguće odrediti pravu vrednost merene veličine, zbog nesavršenosti samog merenja i predmeta koji se meri, novi pristup, pristup nesigurnosti, izostavlja termin "prava vrednost" i u skladu sa definicijom razmatra interval u kome se sa određenom verovatnoćom ta vrednost nalazi. Taj interval koji obuhvata najbolju procenu merene veličine predstavlja zapravo mernu nesigurnost.

Merna nesigurnost predstavlja interval u kome se nalazi prava vrednost merene veličine i može se proceniti ili eksperimentalno odrediti uz određene uslove koji ograničavaju njenu vrednost.

Merna nesigurnost je parametar pridružen rezultatu merenja koji karakteriše rasipanje (disperziju) vrednosti koje bi razumno mogle da se pripišu mernoj veličini. Ovaj parametar je procenjena vrednost i predstavlja indikaciju kvaliteta izvršenog merenja.

2. Faktori i njihov doprinos mernoj nesigurnosti

Ukupna vrednost nesigurnosti nekog merenja može se odrediti samo ako su poznati svi ključni faktori koji utiču na merenje i njihov doprinos ovoj vrednosti. Naravno, nije uvek moguće odrediti sve uticaje, ali je iskustveno moguće proceniti one najbitnije čiji je doprinos znatno veći od ostalih. Među najbitnijim faktorima, koji su prisutnu u skoro svim procesima merenja i čiji se doprinos mernoj nesigurnosti može proceniti, spadaju sledeći:

1. nepotpuna definisanost merene veličine
2. način uzorkovanja
3. način rukovanja uzorkom (transport, skladištenje, rukovanje i priprema za merenje)
4. neadekvatno poznavanje efekata uslova okoline na merenje ili nesavršeno merenje uslova okoline
5. nesavršenost u postavci merenja, merne metode i merne procedure
6. nesavršenost etalona, referentnih materijala i merne opreme
7. neegzaktna vrednost konstanti ili drugih parametara dobijenih iz spoljašnjih izvora i korišćenih pri izračunavanju rezultata
8. nesigurnost koja proističe iz korekcije rezultata merenja
9. aproksimacije i pretpostavke unete u proceduru i metodu merenja uključujući i nesavršenost softvera za izračunavanje
10. obučenost osoblja koje sprovodi merenja

Svi faktori se mogu razvrstati u sledeće uticajne celine: osoblje, metoda, smeštaj i uslovi okoline, oprema i način postupanja sa predmetom merenja.

Doprinosi svih navedenih faktora ukupnoj vrednosti merne nesigurnosti čine budžet merne nesigurnosti koja se odnosi na određeno etaloniranje ili ispitivanje. Procena ovih doprinosa i ukupnog budžeta je moćno sredstvo u implementaciji standarda SCS ISO/IEC 17025 i analizi kvaliteta rezultata obavljenih merenja.

Poznavanje merne nesigurnosti rezultata etaloniranja ili ispitivanja, je od fundamentalne važnosti za laboratorije, njene klijente i sve one koji koriste ove rezultate. Bez toga se ne može oceniti poverenje u rezultate obavljenih ispitivanja, odnosno etaloniranja, kao ni izvršiti njihovo poređenje, čak ni između njih samih. Nesigurnost rezultata merenja daje informaciju o kvalitetu merenja.

3. Komponente merne nesigurnosti

Merna nesigurnost se procenjuje kroz dva metoda koji su u suštini samo koncepti za obradu različitih vrsta mernih rezultata: metod tipa A i metod tipa B. Oba tipa procene su zasnovana na raspodelama verovatnoće. Rezultujuće nesigurnosti su kvantitativno definisane varijansama ili standardnim odstupanjem u oba slučaja.

Tip A standardne nesigurnosti je dobijen iz serije ponovljenih posmatranja i jednak je kvadratnom korenu statistički procenjene varijanse, i zove se standardno odstupanje. Metod tipa A je metod procene nesigurnosti statističkom analizom serije posmatranja. U većini slučajeva, rezultati ponovljenih merenja su raspodeljeni oko srednje vrednosti u zvonastom obliku krive ili normalno raspodeljeni. Ono što je karakteristično za ovu raspodelu je da je verovatnoća vrednosti koje leže bliže procenjenoj srednjoj vrednosti veća od onih koje leže u blizini ekstrema. Procena ponovljenih merenja se dobija relativno jednostavnom matematičkom formulom. Ovo je izvedeno iz teorije statistike, a parametar koji se određuje zove se standardno odstupanje.

Procena vrednosti veličine može biti određena, bez stvarnih posmatranja, putem iskustva baziranog na dostupnim informacijama. Takva procena naziva se metod procene tipa B i izvedena nesigurnost označava se kao standardna nesigurnost tipa B. Metod procene tipa B je definisan kao metod procene nesigurnosti sredstvima različitim od statističke analize serije posmatranja. Tip B standardne nesigurnosti je izračunat iz pretpostavljene funkcije gustine raspodele zasnovane na stepenu verovatnoće da će se događaj pojaviti. Tip B standardne nesigurnosti nije neophodno reprezentovan normalnom raspodelom. U slučajevima kada podaci nisu smešteni oko srednje vrednosti, primenjuju se raspodele kao pravougaona, trouglasta, trapezoidna, U-oblika i druge.

Merna nesigurnost tip B određuje se na osnovu:

- svih raspoloživih saznanja o korišćenoj mernoj opremi, o uticaju parametara okruženja na merenje, o raznim vrstama smetnji
- podataka iz kataloga koje proizvođač daje uz merni instrument
- podataka iz uverenja o etaloniranju
- podataka iz priručnika
- podataka dobijenih iskustveno.

3.1. Merna nesigurnost tip A

Ako su rezultati ponovljenih merenja predstavljeni uzorkom: $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n$ može se izračunati srednja vrednost:

$$x_s = \frac{1}{n} \cdot \sum_{a}^{n} x_i \qquad (1)$$

i standardno odstupanje pojedinih rezultata, tj. merna nesigurnost pojedinih rezultata:

$$u(x) \equiv s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n} (x_i - x_s)^2}{n-1}} \qquad (2)$$

Srednja vrednost x_s kao veličina slučajnog karaktera ima svoje standardno odstupanje s_{x_s}, merna nesigurnost srednje vrednosti, koje prema teoriji grešaka iznosi:

$$u_s = s_{x_s} = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

U ovom slučaju broj stepeni slobode je:

$$\nu = n - 1 \tag{4}$$

Statistička nesigurnost koja odgovara mernoj nesigurnosti tip A zavisi od statističke raspodele koja se može usvojiti u datom slučaju. Ako se radi o relativno velikim uzorcima teorijski se može pokazati da srednja vrednost ima Gausovu raspodelu (odgovarajući dokaz daje centralna granična teorema). Pri tome elementi koji sačinjavaju uzorak mogu imati bilo koju od raspodela (uniformnu, Gausovu i dr.).

Standardno odstupanje predstavlja takođe slučajnu veličinu što znači da i ono takođe ima svoje standardno odstupanje s_s koje zavisi od broja elemanata n. Ako je zastupljena Gausova raspodela iz teorije se dobija:

$$s_s = \frac{s}{\sqrt{2(n-1)}} \tag{5}$$

s_s ima vrednost koja sporo opada sa porastom broja n $\Rightarrow$ rezultati dobijeni statističkom analizom malog broja podataka imaju lošu pouzdanost.

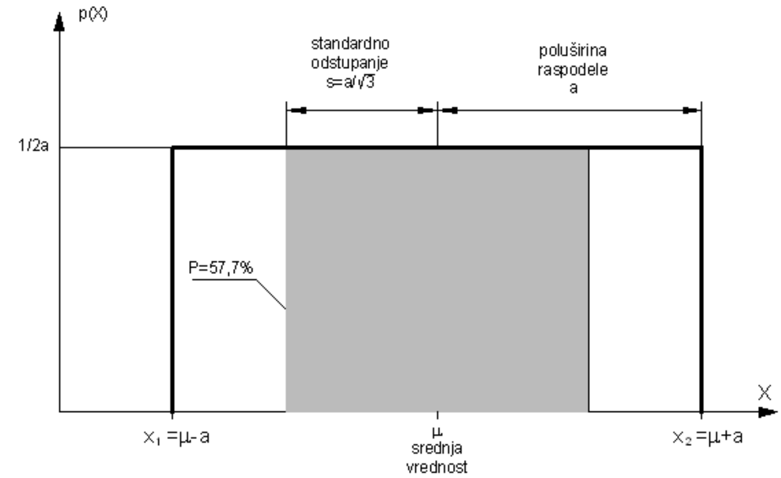
3.2. Merna nesigurnost tip B

Jedna od osnovnih postavki je da se svakom podatku o mernoj nesigurnosti može pridružiti neka funkcija raspodele kao i verovatnoća koja odgovara tom podatku. Procenjivanje merne nesigurnosti tip B se radi tako što se odredi tip raspodele i odredi se standardna devijacija.

Moguće raspodele za mernu nesigurnost tip B:

- Ravnomerna (uniformna) raspodela,
- Trougaona raspodela
- Trapezna raspodela
- Gausova raspodela
- Studentova (t) raspodela
- U raspodela.

U ovom radu će se primenjivati ravnomerna (uniformna) raspodela. Uniformna raspodela se najčešće usvaja kada se raspolaže sa malo informacija o nekom instrumentu. Na primer, iz proizvođačkog prospekta se pročita podatak da instrument ima garantovanu grešku manju od ±1,5 % maksimalne vrednosti. Ako ne postoji iskustvo ili drugo saznanje o eventualnom grupisanju rezultata oko srednje vrednosti, može se pretpostaviti da rezultati pri nekoj vrednosti merene veličine imaju uniformnu raspodelu sa poluširinom $a = 0.015 \cdot$ izmerena vrednost.



Slika 1. Uniformna raspodela

Dijagram simetrične ravnomerne raspodele prikazan je na Slici 1. Raspodela je određena srednjom vrednošću μ i poluširinom intervala *a.* Vrednosti slučajne promenljive x mogu da se nalaze u opsegu $x \in (\mu - a, \mu + a)$, pri čemu je svaka vrednost u intervalu podjednako verovatna. Svaka raspodele mora da ispunjava uslov normiranosti, što znači da površina ispod krive raspodela iznosi 1. Matematički je ovaj uslov izražen izrazom:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \tag{6}$$

gde je p(x) funkcija raspodele. Iz uslova normiranosti i sa Slike 1 dobija se:

$$p(x) = \frac{1}{2 \cdot a} \tag{7}$$

Standardno odstupanje, kao koren srednje vrednosti kvadrata odstupanja, dobija se izrazom:

$$s = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \cdot (x-\mu)^2 \, dx} \tag{8}$$

Ubacivanjem jednačine (7) u jednačinu (8) dobija se standardno odstupanje s_r koje je jednako standardnoj nesigurnosti:

$$u_r = s_r = \frac{a}{\sqrt{3}}. \tag{9}$$

3.3. Kombinovana merna nesigurnost

Kada se procenjuje ukupna nesigurnost, svaki doprinos nesigurnosti mora biti uzet u obzir posebno. Nesigurnost izražena na ovakav način je označena kao kombinovana nesigurnost i svaki pojedinačni doprinos nesigurnosti predstavlja komponentu nesigurnosti. Kombinovana nesigurnost je procenjeno standardno odstupanje i karakteriše rasipanje vrednosti koje bi mogle biti pridružene merenoj veličini.

Merena (izlazna) izlazna veličina Y zavisi od određenog broja ulaznih veličina X.

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots X_n) \Rightarrow y = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{10}$$

Kombinovana merna nesigurnost za vrednost y izlazne veličine generisana za svaku vrednost x_i ulazne veličine je:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2(y)} \tag{11}$$

Odnos standardne nesigurnosti vrednosti izlazne tj. merene veličine $u_i(y)$ i standardnih nesigurnosti vrednosti ulaznih veličina $u(x_i)$ data je izrazom:

$$u_i(y) = c_i \cdot u(x_i) \tag{12}$$

Gde je c_i koeficijent osetljivosti i pokazuje kako se vrednost merene veličine menja sa malim promenama vrednosti ulaznih veličina:

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{13}$$

3.4. Proširena merna nesigurnost

Verovatnoća da se vrednost merene veličine nalazi u intervalu koji je definisan pomoću standardne nesigurnosti je relativno mala:

- za normalnu raspodelu - nesigurnosti tipa A, 68%
- za uniformnu raspodelu - nesigurnosti tipa B, 58%

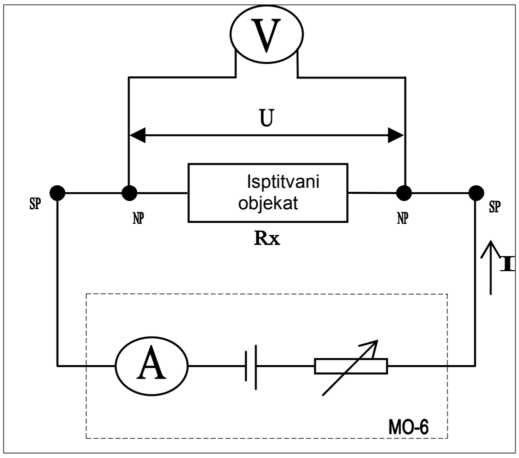
Da bi se merna nesigurnost garantovala sa većom verovatnoćom uveden je parametar pod nazivom proširena merna nesigurnost. Proširena merna nesigurnost je veličina koja definiše interval oko rezultata merenja u kome se može očekivati veliki deo raspodele vrednosti koja se može pripisati mežerandu. Ovo je ostvareno množenjem kombinovane standardne nesigurnosti sa faktorom pokrivenosti k. Kao rezultat se dobije proširena standardna nesigurnost označena sa U. Tada je rezultat merenja izražen kao $Y = y \pm U$.

4. Metoda merenja otpornosti

Metoda merenja otpornosti, U-I metoda, koja se koristi u Laboratoriji za ispitivanje izolacionih sistema instituta „Nikola Tesla“, a primenjuje se kod ispitivanja namotaja transformatora i generatora, svodi se na merenje vrednosti napona i struje, pomoću uređaja MO-6 i digitalnog multimetra ''Fluke'' 189. Vrednosti otpornosti se dobija računski iz odnosa $R = \frac{U}{I}$. Merni uređaj MO-6 je ujedno merilo struje i strujni izvori DC struje u opsegu do 6 A. Merenje napona je eksterno i kao merni uređaj se koristi digitalni instrument ''Fluke'' 189. Ispitivani namotaj se poveže sa mernim instrumentima MO-6 i ''Fluke'' 189.

Da bi se izbegao uticaj otpornosti veza i otpornosti spojeva u strujnom kolu, napon se meri neposredno na krajevima ispitivanog objekta tako što se voltmetar priključuje na naponske priključke (NP) koji su u odnosu na strujne priključke (SP) bliži ispitivanom objektu (Slika 2.)

Vrednost ispitne struje se bira tako da njena vrednost ne prelazi 10% naznačene struje ispitivanog objekta, kako bi se na ovaj način efekti povećanja otpornosti ispitivanog objekta usled zagrevanja (Džulovi gubici) sveli na najmanju moguću vrednost.



Slika 2. Merna šema

4.1. Analiza merne nesigurnosti

Prvi korak u proceduri procene merne nesigurnosti je kreiranje matematičkog modela koji opisuje funkcionalnu zavisnost merene veličine Y od ulaznih varijabli X_i .

Matematički model grešaka

Pri indirektnom merenju otpornosti merna nesigurnost potiče od greške uređaja, rezolucije uređaja, greške usled ponovljivosti merenja, kao dominantnih komponenti. Uticaj prelaznih otpornosti i temperature (Dzulovi gubici) su svedeni na minimalnu vrednost, tako da se ove komponente mogu zanemariti u proračunu. Matematički model greške za metodu merenja otpornosti dat je sledećim izrazom:

$$\Delta = R - R_m = \delta U + \delta U_{UR} + \delta U_{UR-rez} + \delta I + \delta I_{UR} + \delta I_{UR-rez} \tag{14}$$

Gde su:

Δ	-	Greška merenja
R	-	Vrednost otpornosti koji se ispituje
R_m	-	Izračunata srednja vrednost otpornosti koja se ispituje, $R = \dfrac{U}{I}$
δU	-	Standardna devijacija serije od n merenja

δU_{UR}	-	Greška mernog instrumenta pri merenju napona
δU_{UR-rez}	-	Greška usled rezolucije mernog instrumenta pri merenju napona
δI	-	Standardna devijacija serije od n merenja
δI_{UR}	-	Greška mernog instrumenta pri merenju struje
δI_{UR-rez}	-	Greška usled rezolucije mernog instrumenta pri merenju struje

Izvori merne nesigurnosti

U matematičkom modelu greške date su komponente nesigurnosti koje dominantno određuju mernu nesigurnost i definisane su kao:

1) Komponenta merne nesigurnosti usled ponovljivosti merenja napona $u_1 = u(\delta U)$ – merna nesigurnost tip A, Gausova (normalna) raspodela

- Merenje napona se ponavlja n puta (najmanje 3)
- Izračunava se greška merenja napona
- Takođe se izračuna i srednja vrednost greške i njoj pridružena eksperimentalna standardna devijacija.
- Eksperimentalna standardna devijacija srednje vrednosti izračunava se kada se prethodno izračunata standardna devijacija greške podeli kvadratnim korenom iz broja merenja (u ovom slučaju n).
- U izveštaju ispitivanja ova komponenta merne nesigurnosti se navodi kao merna nesigurnost u_1, tip A sa $n-1$ stepeni slobode

2) Komponenta merne nesigurnosti usled greške mernog instrumenta za merenje napona $u_2 = u(\delta U_{UR})$ – merna nesigurnost tip B, pravougaona (ravnomerna) raspodela

- Uzima se vrednost greške koju daje proizvođač u uputstvu instrumenta ili merna nesigurnost iz uverenja o etaloniranju
- Ako se uzima deklarisana greška proizvođača ova vrednost se deli sa $\sqrt{3}$ i predstavlja mernu nesigurnost usled greške samog mernog uređaja. Ako se uzima vrednost iz uverenja o etaloniranju deli se sa koeficijentom proširenja koji je dala Laboratorija u kojoj je etaloniranje vršeno.
- U izveštaju o ispitivanju ova komponenta merne nesigurnosti se navodi kao merna nesigurnost u_2, tip B sa stepenom slobode ∞

3) Komponenta merne nesigurnosti usled rezolucije mernog instrumenta za merenje napona $u_3 = u(\delta U_{UR-rez})$ – merna nesigurnost tip B, pravougaona (ravnomerna) raspodela

- Ako je "a" rezolucija mernog instrumenta, tada je odgovarajuća komponenta merne nesigurnosti data izrazom $u(\delta U_{UR-rez}) = \frac{a}{2 \cdot \sqrt{3}}$
- U izveštaju ispitivanja ova komponenta merne nesigurnosti se navodi kao merna nesigurnost u_3, tip B sa stepenom slobode ∞

4) Komponenta merne nesigurnosti usled ponovljivosti merenja struje $u_4 = u(\delta I)$ – merna nesigurnost tip A, Gausova (normalna) raspodela

- Merenje struje se ponavlja n puta (najmanje 3)
- Izračunava se greška merenja struje
- Takođe se izračuna i srednja vrednost greške i njoj pridružena eksperimentalna standardna devijacija.
- Eksperimentalna standardna devijacija srednje vrednosti izračunava se kada se prethodno izračunata standardna devijacija greške podeli kvadratnim korenom iz broja merenja (u ovom slučaju n).
- U izveštaju ispitivanja ova komponenta merne nesigurnosti se navodi kao merna nesigurnost u_4, tip A sa $n-1$ stepeni slobode

5) Komponenta merne nesigurnosti usled greške mernog instrumenta za merenje struje $u_5 = u(\delta I_{UR})$ – merna nesigurnost tip B, pravougaona (ravnomerna) raspodela

- Uzima se vrednost greške koju daje proizvođač u uputstvu instrumenta ili merna nesigurnost iz uverenja o etaloniranju
- Ako se uzima deklarisana greška proizvođača ova vrednost se deli sa $\sqrt{3}$ i predstavlja mernu nesigurnost usled greške samog mernog uređaja. Ako se uzima vrednost iz uverenja o etaloniranju deli se sa koeficijentom proširenja koji je dala Laboratorija u kojoj je etaloniranje vršeno.
- U izveštaju o ispitivanju ova komponenta merne nesigurnosti se navodi kao merna nesigurnost u_5, tip B sa stepenom slobode ∞

6) Komponenta merne nesigurnosti usled rezolucije mernog instrumenta $u_6 = u(\delta I_{UR-rez})$ – merna nesigurnost tip B, pravougaona (ravnomerna) raspodela

- Ako je "a" rezolucija mernog instrumenta, tada je odgovarajuća komponenta merne nesigurnosti data izrazom $u(\delta I_{UR-rez}) = \frac{a}{2 \cdot \sqrt{3}}$
- U izveštaju ispitivanja ova komponenta merne nesigurnosti se navodi kao merna nesigurnost u_6, tip B sa stepenom slobode ∞

Određivanje faktora osetljivosti

Faktori osetljivosti pokazuju kako se vrednost merene veličine menja sa malim promenama vrednosti ulaznih veličina.

$$\left.\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\partial u_c(R_m)}{\partial(\delta U_{UR})} = \frac{\partial\left(\frac{U}{I}\right)}{\partial(U)} = \frac{1}{I_m}\\
c_2 &= \frac{\partial u_c(R_m)}{\partial(\delta U)} = \frac{\partial\left(\frac{U}{I}\right)}{\partial(U)} = \frac{1}{I_m}\\
c_3 &= \frac{\partial u_c(R_m)}{\partial(\delta U_{UR-rez})} = \frac{\partial\left(\frac{U}{I}\right)}{\partial(U)} = \frac{1}{I_m}
\end{aligned}\right\} c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{I_m} = C_1 \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}
c_4 &= \frac{\partial u_c(R_m)}{\partial(\delta I)} = \frac{\partial\left(\frac{U}{I}\right)}{\partial(I)} = -\frac{U_m}{I_m^2}\\
c_5 &= \frac{\partial u_c(R_m)}{\partial(\delta I_{UR})} = \frac{\partial\left(\frac{U}{I}\right)}{\partial(I)} = -\frac{U_m}{I_m^2}\\
c_6 &= \frac{\partial u_c(R_m)}{\partial(\delta I_{UR-rez})} = \frac{\partial\left(\frac{U}{I}\right)}{\partial(I)} = -\frac{U_m}{I_m^2}
\end{aligned}\right\} c_4 = c_5 = c_6 = -\frac{U_m}{I_m^2} = C_2 \tag{16}$$

Kombinovana merna nesigurnost

Kombinovana merna nesigurnost izračunava se prema izrazu:

1. U apsolutnim jedinicama:

$$
\begin{aligned}
u_c^2(R_m) = {} & c_1^2 \cdot u^2(\delta U) + c_2^2 \cdot u^2(\delta U_{UR}) + c_3^2 \cdot u^2(\delta U_{UR-rez}) + \\
& + c_4^2 \cdot u^2(\delta I) + c_5^2 \cdot u^2(\delta I_{UR}) + c_6^2 \cdot u^2(\delta I_{UR,rez}) [\Omega]
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Gde je $c_1 = c_2 = c_3 = \dfrac{1}{I_m} = C_1$ i $c_4 = c_5 = c_6 = -\dfrac{U_m}{I_m^2} = C_2$, pa se izraz svodi na:

$$
\begin{aligned}
u_c^2(R_m) = {} & C_1^2 \cdot \left(u^2(\delta U) + u^2(\delta U_{UR}) + u^2(\delta U_{UR-rez})\right) + \\
& + C_2^2 \left(u^2(\delta I) + u^2(\delta I_{UR}) + u^2(\delta I_{UR,rez})\right) [\Omega]
\end{aligned}
\tag{18}
$$

2. U relativnim jedinicama:

$$
\begin{aligned}
\frac{u_c^2(R_m)}{R_m^2} \cdot 100^2\% = {} & c_1^2 \cdot u^2(\delta U) \cdot \frac{I_m^2}{U_m^2} \cdot 100^2\% + c_2^2 \cdot u^2(\delta U_{UR}) \cdot \frac{I_m^2}{U_m^2} \cdot 100^2\% + \\
& + c_3^2 \cdot u^2(\delta U_{UR-rez}) \cdot \frac{I_m^2}{U_m^2} \cdot 100^2\% + c_4^2 \cdot u^2(\delta I) \cdot \frac{I_m^2}{U_m^2} \cdot 100^2\% + \\
& + c_5^2 \cdot u^2(\delta I_{UR}) \cdot \frac{I_m^2}{U_m^2} \cdot 100^2\% + c_6^2 \cdot u^2(\delta I_{UR,rez}) \cdot \frac{I_m^2}{U_m^2} \cdot 100^2\%
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Gde je $c_1 = c_2 = c_3 = \dfrac{1}{I_m}$ i $c_4 = c_5 = c_6 = -\dfrac{U_m}{I_m^2}$, pa se izraz svodi na:

$$
\begin{aligned}
\frac{u_c^2(R_m)}{R_m^2} \cdot 100^2\% = {} & \frac{1}{I_m^2} \cdot u^2(\delta U) \cdot \frac{I_m^2}{U_m^2} \cdot 100^2\% + \frac{1}{I_m^2} \cdot u^2(\delta U_{UR}) \cdot \frac{I_m^2}{U_m^2} \cdot 100^2\% \\
& + \frac{1}{I_m^2} \cdot u^2(\delta U_{UR-rez}) \frac{I_m^2}{U_m^2} \cdot 100^2\% + \frac{U_m^2}{I_m^4} \cdot u^2(\delta I) \cdot \frac{I_m^2}{U_m^2} \cdot 100^2\% + \\
& + \frac{U_m^2}{I_m^4} \cdot u^2(\delta I_{UR}) \cdot \frac{I_m^2}{U_m^2} \cdot 100^2\% + \frac{U_m^2}{I_m^4} \cdot u^2(\delta I_{UR,rez}) \cdot \frac{I_m^2}{U_m^2} \cdot 100^2\%
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{u_c^2(R_m)}{R_m^2} \cdot 100^2\% = {} & \frac{1}{U_m^2} \cdot u^2(\delta U) \cdot 100^2\% + \frac{1}{U_m^2} \cdot u^2(\delta U_{UR}) \cdot 100^2\% \\
& + \frac{1}{U_m^2} \cdot u^2(\delta U_{UR-rez}) \cdot 100^2\% + \frac{1}{I_m^2} \cdot u^2(\delta I) \cdot 100^2\% + \\
& + \frac{1}{I_m^2} \cdot u^2(\delta I_{UR}) \cdot 100^2\% + \frac{1}{I_m^2} \cdot u^2(\delta I_{UR,rez}) \cdot 100^2\%
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$u_{c,rel}^2(R_m)=u_{rel}^2(\delta U)+u_{rel}^2(\delta U_{UR})+u_{rel}^2(\delta U_{UR-rez})+$$
$$+u_{rel}^2(\delta I)+u_{rel}^2(\delta I_{UR})+u_{rel}^2(\delta I_{UR,rez})[\%] \tag{22}$$

Ovde se može izvući važan zaključak: kako komponente merne nesigurnosti potiču od merila napona i struje, samim tim su izražene u amperima i voltima i kao takve se ne mogu sabirati. Koeficijenti osetljivosti pomnoženi sa odgovarajućim komponentama merne nesigurnosti daju kombinovanu nesigurnosti izraženu u Ω-ima (jednačina (18)) i %-ima (jednačina (22)). Ovo je važno, jer se kod direktnih metoda matematički model sastoji od komponenti koje imaju vrednost kao i veličina koja se meri, pa se faktori osetljivosti izostavljaju, jer su jednaki 1. Kod indirektnih metoda pri računanju merne nesigurnosti faktori osetljivosti su bitan element i bez njih je proračun pogrešan.

Proširena merna nesigurnost

Proširena merna nesigurnost "U" se dobija kao proizvod kombinovane merne nesigurnosti $u_c(R_m)$ i faktora proširenja "k":

$$U = k \cdot u_c(R_m) \tag{23}$$

Usvajanje vrednosti koeficijenta proširenja - U slučaju da preovlađuje jedna ili više komponenti merne nesigurnosti koje imaju raspodelu različitu od Gausove, koeficijent proširenja "k" za nivo poverenja 95% mora posebno da se izračuna. Kriterijum po kome se određuje dominantnost jedne od komponenti merne nesigurnosti u odnosu na druge je da izraz $\frac{u_R(y)}{u_D(y)} \leq 3$ bude zadovoljen, gde je sa $u_D(y)$ označena dominantna komponenta, a sa $u_R(y)$ ukupna merna nesigurnost svih nedominantnih komponenata. Pošto preovlađuju komponente sa pravougaonom raspodelom, koeficijent proširenja se izračunava na sledeći način.

Merna nesigurnost za pravougaonu raspodelu data je izrazom $u(y)=\frac{d}{\sqrt{3}}$, gde je "d" poluširina raspodele.

Za istu raspodelu važi: $p=\frac{U}{d} \Rightarrow U = p \cdot d$, pa je koeficijent proširenja dat izrazom:

$$k(p) = \frac{U(p)}{u(y)} = \frac{U(p)}{\frac{d}{\sqrt{3}}} = \frac{p \cdot d}{\frac{d}{\sqrt{3}}} = p \cdot \sqrt{3} \tag{24}$$

Dakle za verovatnoću p=95% koeficijent proširenja je:

$$k(p) = 0.95 \cdot \sqrt{3} \cong 1.65 \tag{25}$$

Primer proračuna merne nesigurnosti

Izvršeno je merenje otpornosti namotaja generatora mernim instrumentima MO-6 i Fluke 189. Vršena su tri merenja pri struji od 5.00 A i naponu od 719.65mV, 719.67mV i 719.63mV. Računski je dobijena srednja vrednost otpornosti od 143.93 mΩ.

U uputstvu proizvođača daje se podatak da instrument Fluke 189 na ovom opsegu napona ima maksimalno odstupanje od ±0.025% od izmerene vrednosti (greška instrumenta). Rezolucija mernog instrumenta Fluke 189, za ovaj opseg napona, prema uputstvu proizvođača, iznosi ±0.1mV. U tabeli 1. date su greške za određene opsege napona koje daje proizvođač.

U uputstvu proizvođača daje se podatak da instrument MO-6 na ovom opsegu struje ima maksimalno odstupanje od ±0.5% od izmerene vrednosti (greška instrumenta). Rezolucija mernog instrumenta MO-6, za ovaj opseg struje, prema uputstvu proizvođača, iznosi ±2 digita. Greška instrumenta koja je data u uputstvu proizvođača je ista za svaki opseg napona i iznosi (±0.5% ±2 digita).

Prema uputstvu iz prethodnog poglavlja, izračunate su sledeće vrednosti komponenti merne nesigurnosti i date su u tabeli 2. u apsolutnim jedinicama i u tabeli 3. u relativnim jedinicama.

Tabela 1. Greška instrumenta za određene opsege napona

Opseg dc napona	Greška	Rezolucija
50.000 mV	0.1% U_m	0.001 mV
500.00 mV	0.03% U_m	0.01 mV
3000.0 mV	0.025% U_m	0.1 mV

Proračun u apsolutnim jedinicama:

Na osnovu matematičkog modela definisanog jednačinom (14), mogu se izračunati sledeće komponente:

Komponente merne nesigurnosti pri merenju napona

1. Komponenta merne nesigurnosti usled ponovljivosti merenja:

Srednja vrednost napona: $\overline{U}=\frac{1}{3}(719.65+719.63+719.67)=719.65mV$

Standardna devijacija:

$$\delta U=\sqrt{\frac{1}{3-1}\cdot\sum_{k=1}^{3}(U_k-\overline{U})^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left((719.65-719.65)^2+(719.63-719.65)^2+(719.67-719.65)^2\right)}=0.02mV$$

Standardna merna nesigurnost: $u(\delta U)=\frac{\delta U}{\sqrt{3}}=\frac{0.02}{\sqrt{3}}=0.0115mV$

2. Komponenta merne nesigurnosti usled greške instrumenta

$$\delta U_{UR}=\frac{0.025\%}{100}\cdot 719.65=0.1799mV$$

Standardna merna nesigurnost: $u(\delta U_{UR})=\frac{\delta U_{\mathrm{UR}}}{\sqrt{3}}=\frac{0.1799}{\sqrt{3}}=0.103mV$

3. Komponenta merne nesigurnosti usled rezolucije mernog instrumenta $\delta U_{\mathrm{UR\text{-}rez}}=0.1mV$

Standardna merna nesigurnost: $u(\delta U_{UR-rez})=\frac{\delta U_{UR,rez}}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{0.1}{2\cdot\sqrt{3}}=0.028mV$

Komponente merne nesigurnosti pri merenju struje

4. Komponenta merne nesigurnosti usled ponovljivosti merenja:

Srednja vrednost: $\bar{I}=\frac{1}{3}(5.00+5.00+5.00)=5.00A$

Standardna devijacija:

$$\delta I=\sqrt{\frac{1}{3-1}\cdot\sum_{k=1}^{3}(I_k-\bar{I})^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left((5.00-5.00)^2+(5.00-5.00)^2+(5.00-5.00)^2\right)}=0A$$

Standardna merna nesigurnost: $u(\delta I)=\frac{\delta I}{\sqrt{3}}=\frac{0}{\sqrt{3}}=0A$

5. Komponenta merne nesigurnosti usled greške instrumenta

$$\delta I_{UR} = \frac{0.5\%}{100} \cdot 5.00 = 0.025A$$

Standardna merna nesigurnost: $u(\delta I_{UR}) = \frac{\delta I_{\mathrm{UR}}}{\sqrt{3}} = \frac{0.025}{\sqrt{3}} = 0.0144A$

6. Komponenta merne nesigurnosti usled rezolucije mernog instrumenta

$$\delta I_{UR-rez} = 0.02A$$

Standardna merna nesigurnost: $u(\delta I_{UR-rez}) = \frac{\delta I_{UR,rez}}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{0.02}{2 \cdot \sqrt{3}} = 0.0057A$

Koeficijenti osetljivosti:

$$c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{I_m} = \frac{1}{5.00} = 0.2\frac{1}{A} \; c_1 = c_5 = c_6 = \frac{1}{I_m} = \frac{1}{5.00} = 0.2\frac{1}{A}$$

$$c_4 = c_5 = c_6 = -\frac{U}{I_m^2} = -\frac{719.65}{5.00^2} = -28.786\frac{mV}{A^2}$$

Kombinovana merna nesigurnost:

$$u_c^2(R_m) = c_1^2 \cdot u^2(\delta U) + c_2^2 \cdot u^2(\delta U_{UR}) + c_3^2 \cdot u^2(\delta U_{UR-rez}) +$$
$$+ c_4^2 \cdot u^2(\delta I) + c_5^2 \cdot u^2(\delta I_{UR}) + c_6^2 \cdot u^2(\delta I_{UR,rez})$$

$$u_c(R_m) = \sqrt{0.2^2\left(0.0115^2 + 0.103^2 + 0.0028^2\right) + (-28.786)^2\left(0 + 0.0144^2 + 0.0057^2\right)}$$
$$= 0.446m\Omega$$

Proširena merna nesigurnost:

$$U = k \cdot u_c(R_m) = 1.65 \cdot 0.466 = 0.7366m\Omega$$

Tabela 2. Komponente merne nesigurnosti izražene u apsolutnim jedinicama

<table>
<tr><th colspan="2">Komponente m.n.</th><th>Vrednost</th><th>M.n.</th><th>Vrednost</th></tr>
<tr><td colspan="2">δU</td><td>0.02mV</td><td rowspan="8">Kombinovana m.n. $u_c(R_m)$</td><td rowspan="8">0.446mΩ</td></tr>
<tr><td colspan="2">δU_{UR}</td><td>0.1799mV</td></tr>
<tr><td colspan="2">δU_{UR-rez}</td><td>0.1mV</td></tr>
<tr><td colspan="2">δI</td><td>0A</td></tr>
<tr><td colspan="2">δI_{UR}</td><td>0.025A</td></tr>
<tr><td colspan="2">δI_{UR-rez}</td><td>0.02A</td></tr>
<tr><td colspan="2">Koef. osetljivosti $c_1= c_2= c_3$</td><td>$0.2\frac{1}{A}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Koef. osetljivosti $c_4= c_5= c_6$</td><td>$-28.786\frac{V}{A^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Koef. proširenja k</td><td>1.65</td><td rowspan="3">Proširena m.n. za p=95% $U = k \cdot u_c(R_m)$</td><td rowspan="3">0.7366mΩ</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Standardna m. n.</td><td>$u(\delta U)$</td><td>0.0115mV</td></tr>
<tr><td>$u(\delta U_{UR})$</td><td>0.103mV</td></tr>
<tr><td>$u(\delta U_{UR-rez})$</td><td>0.0028mV</td><td colspan="2" rowspan="2">$R_{namotaja}=R_r(m\Omega)\pm U$</td></tr>
<tr><td>$u(\delta I)$</td><td>0A</td></tr>
<tr><td>$u(\delta I_{UR})$</td><td>0.0144A</td><td colspan="2" rowspan="2">143.93(mΩ)±0.73mΩ</td></tr>
<tr><td>$u(\delta I_{URrez})$</td><td>0.0057A</td></tr>
</table>

Krajnji rezultat u izveštaju o ispitivanju se predstavlja se izrazom:

$R_{namotaja}$=143.93(mΩ)±0.73 mΩ

gde je ±0.73 mΩ proširena merna nesigurnost sa faktorom proširenja 1.65 i nivoom pouzdanosti 0.95%.

Proračun u %:

Komponente merne nesigurnosti pri merenju napona

1. Komponenta merne nesigurnosti usled ponovljivosti merenja:

Srednja vrednost: $\overline{U} = \frac{1}{3}\left(719.65 + 719.63 + 719.67\right) = 719.65mV$

Standardna devijacija:

$$\delta(U) = \sqrt{\frac{1}{3-1} \cdot \sum_{k=1}^{3} (U_k - \overline{U})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left((719.65 - 719.65)^2 + (719.63 - 719.65)^2 + (719.67 - 719.65)^2\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(0 + 0.0004 + 0.0004\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 0.0008} = 0.02mV$$

$$\delta(U) = \frac{0.02}{719.65} \cdot 100\% = 0.0028\%$$

Standardna merna nesigurnost: $u(\delta U) = \frac{\delta(U)}{\sqrt{3}} = \frac{0.0028}{\sqrt{3}} = 0.0016\%$

2. Komponenta merne nesigurnosti usled greške instrumenta

$\delta U_{UR} = 0.025\%$

Standardna merna nesigurnost: $u(\delta U_{UR}) = \frac{\delta U_{UR}}{\sqrt{3}} = \frac{0.025}{\sqrt{3}} = 0.0144\%$

3. Komponenta merne nesigurnosti usled rezolucije mernog instrumenta

$$\delta U_{UR-rez} = \frac{0.1 mV}{719.65 mV} \cdot 100\% = 0.01389\%$$

Standardna merna nesigurnost:

$$u(\delta U_{UR-rez}) = \frac{\delta U_{UR,rez}}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{0.01389}{2 \cdot \sqrt{3}} = 0.004\%$$

Komponente merne nesigurnosti pri merenju struje

4. Komponenta merne nesigurnosti usled ponovljivosti merenja:

Srednja vrednost: $\bar{I} = \frac{1}{3}(5.00 + 5.00 + 5.00) = 5.00 A$

Standardna devijacija:

$$\delta(I) = \sqrt{\frac{1}{3-1} \cdot \sum_{k=1}^{3} (I_k - \bar{I})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left((5.00 - 5.00)^2 + (5.00 - 5.00)^2 + (5.00 - 5.00)^2\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (0 + 0 + 0)} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 0} = 0$$

Standardna merna nesigurnost: $u(\delta I) = \frac{\delta I}{\sqrt{3}} = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0\%$

5. Komponenta merne nesigurnosti usled greške instrumenta

$\delta I_{UR} = 0.5\%$

Standardna merna nesigurnost: $u(\delta I_{UR}) = \frac{\delta I_{UR}}{\sqrt{3}} = \frac{0.5}{\sqrt{3}} = 0.2886\%$

6. Komponenta merne nesigurnosti usled rezolucije mernog instrumenta $\delta I_{UR-rez} = \dfrac{0.02A}{5A} \cdot 100 = 0.4\%$

Standardna merna nesigurnost: $u(\delta I_{UR-rez}) = \dfrac{\delta I_{UR,rez}}{2 \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{0.4}{2 \cdot \sqrt{3}} = 0.115\%$

Kombinovana merna nesigurnost:

Koristeći jednačinu (22), gde je kombinovana merna nesigurnost predstavljena kao zbir kvadrata komponenti standardnih mernih nesigurnosti izraženih u %, dobija se:

$$u^2_{c,rel}(R_m) = u^2(\delta U) + u^2(\delta U_{UR}) + u^2(\delta U_{UR-rez}) +$$
$$+ u^2(\delta I_{UR}) + u^2(\delta I_{UR}) + u^2(\delta I_{UR,rez})$$

$$u_{c,rel} = \sqrt{0.0016^2 + 0.0144^2 + 0.004^2 + 0^2 + 0.2886^2 + 0.115^2} = 0.31\%$$

Proširena merna nesigurnost:

$$U = k \cdot u_c(R_m) = 1.65 \cdot 0.31 = 0.51\%$$

Tabela 3. Komponente merne nesigurnosti izražene u procentima

<table>
<tr><th colspan="2">Komponente m.n.</th><th>Vrednost (%)</th><th>Merna nesigurnost</th><th>Vrednost(%)</th></tr>
<tr><td colspan="2">δU</td><td>0.0028</td><td rowspan="6">Kombinovana m.n. $u_c(R_m)$</td><td rowspan="6">0.31</td></tr>
<tr><td colspan="2">δU_{UR}</td><td>0.025</td></tr>
<tr><td colspan="2">δU_{UR-rez}</td><td>0.00138</td></tr>
<tr><td colspan="2">δI_{UR}</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">δI_{UR}</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td colspan="2">δI_{UR-rez}</td><td>0.4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Koef. proširenja k</td><td>1.65</td><td rowspan="3">Proširena m.n. za p=95% $U = k \cdot u_c(R_m)$</td><td rowspan="3">0.51</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Standardna m. n.</td><td>$u(\delta U)$</td><td>0.0016</td></tr>
<tr><td>$u(\delta U_{UR})$</td><td>0.0144</td></tr>
<tr><td>$u(\delta U_{UR-rez})$</td><td>0.004</td><td colspan="2" rowspan="2">$R_{namotaja}=R_r(m\Omega)\pm U$</td></tr>
<tr><td>$u(\delta I_{UR})$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$u(\delta I_{UR})$</td><td>0.2886</td><td colspan="2" rowspan="2">143.93(mΩ)±0.51%</td></tr>
<tr><td>$u(\delta I_{UR-rez})$</td><td>0.115</td></tr>
</table>

Krajnji rezultat izvedenog merenja predstavlja se izrazom:

$R_{namotaja}$=143.93(mΩ)±0.51%

gde je ±0.51 % proširena merna nesigurnost sa faktorom proširenja 1.65 i nivoom pouzdanosti 0.95%

5. Zaključak

Merna nesigurnost je danas važan podatak sadržan u rezultatu ispitivanja. Iako se čini komplikovano njeno određivanje, procena merne nesigurnosti nije ni pitanje rutine, ni matematički fenomen, već zavisi od celokupnog znanja o prirodi merenja, o predmetu merenja i mogućnosti procene faktora koji utiču na tačnost merenja. Mernu nesigurnost metode indirektnog merenja otpornosti čine komponente nesigurnosti koje potiču od greške instrumenta, rezolucije instrumenta i ponovljivosti merenja. Faktori osetljivosti kod indirektnih merenja, kada se merna nesigurnost izražava u apsolutnim jedinicama, svode komponente merne nesigurnosti na jedinicu merene veličine, a kada se merna nesigurnost izražava u relativnim jedinicama, svode sve komponente na vrednosti u %. Iz primera procene merne nesigurnosti u apsolutnim jedinicama kod metode indirektnog merenja otpornosti, dobija se vrednost proširene merne nesigurnosti od ±0.73 mΩ, sto predstavlja ±0.51% od izmerene vrednosti (143.93 mΩ), a to je dobijeno i naknadnim proračunom, kada se postupak procene merne nesigurnosti izražavao u %. Dakle, dobijaju se rezultati sa istom tačnošću, bilo da se merna nesigurnost računa u apsolutnim jedinicama ili %.

Literatura

[1] EA-4/02 Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration, April 1997

[2] ISO Guide to the expression of Uncertainty in Measurement, 1993.

[3] IEEE 118:1978 - IEEE Standard Test Code for Resistance Measurement

[4] A. Carlson, J. Fuhr, G. Schemel, F. Wagscheider: ``Testing of Power Transformers –Routine tests, Type tests and Special tests``, 2003, 1st Edition published by PRO PRINT for ABB

[5] SCS ISO/IEC 17025:2006 Opšti zahtevi za kompetentnost laboratorija za ispitivanje i laboratorija za etaloniranje

Abstract. This paper presents the basic factors and sources of measurement uncertainty using indirect method of electrical resistance measurement. The procedures of evaluation are described and an example of uncertainty measurement is given.

Keywords: uncertainty of measurement, indirect measurement, resistance.

Assessment of Measurement Uncertainty in Indirect Method of Electrical Resistance Measurement

Rad primljen u uredništvo 26.11.2010. godine
Rad prihvaćen 30.11.2010. godine