Pregledni rad

UDK: 621.311.21 : 532.595
BIBLID:0350-8528(2004),16.p.19-31

MATEMATIČKI MODELI HIDRAULIČKIH SISTEMA HIDROELEKTRANA

Dušan Arnautović
Elektrotehnički institut "Nikola Tesla", Beograd

Sadržaj: *U radu je dat pregled matematičkih modela hidrauličkih sistema hidroelektrana. Izložen je opšti nelinearni matematički model hidrauličkog sistema, koji obuhvata dve osnovne jednačine koje opisuju prelazne pojave pri protoku fluida (jednačinu kretanja i jednačinu kontinuiteta). Dat je pregled metoda za rešavanje ovih jednačina, sa posebnim osvrtom na metodu karakteristika, kao najčešće korišćenu metodu za analize nestacionarnih protoka fluida. Posebno su izloženi prostiji modeli koji koriste teoriju elastičnog i krutog vodenog udara. Izvršena je analiza uticaja elastičnosti vode na rezultate proračuna hidrauličkog udara i dat je uporedni pregled karakteristika izloženih metoda.*

Ključne reči: *matematički modeli/hidraulički sistem/metode analize.*

1. UVOD

Za analizu rada hidroelektrana, u opštem slučaju, potrebno je formirati odgovarajuće matematičke modele elemenata od kojih se sastoji i te matematičke modele povezati u jednu celinu. U ovom radu posmatraće se samo jedan element hidroelektrane, i to hidraulička instalacija, odnosno sistem.

Matematički modeli hidrauličkog sistema razlikuju se po svojoj složenosti i po pretpostavkama koje se uvode pri njihovom izvođenju. Složenost matematičkog modela zavisi od vrste analize koja se želi sprovesti. Prvo je formiran opšti nelinearni matematički model, koji polazi od dve osnovne jednačine koje opisuju prelazne pojave pri protoku fluida: jednačine ravnoteže sila (jednačina kretanja) i jednačine kontinuiteta. Za rešavanje ovih jednačina izložen je pregled metoda za rešavanje. Prvo je izložen metod karakteristika, kao najčešće korišćen metod analize nestacionarnog protoka fluida.

U velikom broju slučajeva, a posebno kada se posmatraju složeni elektroenergetski sistemi (EES), gde hidroelektrane predstavljaju samo jedan element sistema, nije potrebna tolika tačnost modela i zato se koriste uprošćeniji modeli. Posebno je izložen model koji koristi teoriju elastičnog vodenog udara, a potom i prostiji model koji koristi teoriju krutog vodenog udara. Sprovedena je analiza uticaja elastičnosti vode na rezultate proračuna hidrauličkog udara i dat uporedni pregled karakteristika izloženih metoda.

2. METODE ANALIZE NESTACIONARNIH PROTOKA FLUIDA

Dve osnovne diferencijalne jednačine koje opisuju prelazne pojave pri protoku fluida su jednačina ravnoteže sila (jednačina kretanja) i jednačina kontinuiteta [1,2,3]. Pri izvođenju ovih jednačina učinjene su sledeće pretpostavke:

a) protok u cevi je jednodimenzionalan i brzina je uniformna na preseku cevi,
b) zidovi cevi i fluid su nelinearno elastični, tj. stres je proporcionalan naprezanju,

c) formule za izračunavanje gubitaka trenja u stacionarnom stanju važe za vreme prolaznih stanja.

Jednačina ravnoteže sila glasi

$$gH_x + VV_x + V_t + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \tag{1}$$

gde su:

f - koeficijent trenja o zidove cevovoda Darcy – Weisbach-a
V - brzina protoka fluida
D - prečnik cevi
g - ubrzanje zemljine teže
H - pad
x,t - kao indeksi označavaju parcijalne izvode po dužini i vremenu

$\dot{V} = VV_x + V_t$ - brzina promene proticanja fluida

Jednačina kontinuiteta (koja se izvodi uz pretpostavku b. i za male deformacije) glasi:

$$\frac{a^2}{g}V_x + V\left(H_x + \sin\alpha\right) + H_t = 0 \tag{2}$$

gde su:

α - ugao nagiba cevovoda
a - brzina prostiranja talasa

Jednačine (1) i (2) mogu se izraziti preko protoka Q, umesto brzine V. Tada je

$$SgH_x + \dot{Q} + \frac{fQ}{2DS}|Q| = 0 \tag{1'}$$

$$\frac{a^2}{gS}Q_x + \left(H_x + \sin\alpha\right) + H_t = 0 \tag{2'}$$

gde je S - poprečni presek cevi.

Različita zanemarenja u (1) i (2), kao što su zanemarenje VV_x u (1) i $V(H_x + \sin\alpha)$ u (2), kao i zanemarenje trenja $fV|V|/2D$ u (1), dovode do različitih metoda za rešavanje ovih osnovnih jednačina.

Za rešavanje ovih jednačina postoji čitav niz metoda [1,3]:

1. aritmetički metod
2. grafički metod
3. metod karakteristika
4. algebarski metod (linearna analiza)
5. metod impedansi
6. metod konačnih priraštaja (implicitni metod)
7. ostale metode

Pregled metoda i pretpostavki pod kojima važe, dat je u Tabeli 1.

Tabela 1. Pregled metoda i uvaženih pretpostavki

METODA ---------------------- **PRETPOSTAVKA**	**ARITMETIČKI METOD**	**GRAFIČKI METOD**	**METOD KARAKTERISTIKA**	**ALGEBARSKI METOD**	**METOD IMPEDANSI**	**METODA KONAČNIH PRIRAŠTAJA (implicitna metoda)**
Zanemarenje trenja u (1)	DA	DA*	/	/	linearizovan član za trenje	/
Zanemarenje VVx u (1)	DA	DA	/	DA	DA	/
Zanemarenje V (H_x+sinα) u (2)	DA	DA	/	DA	DA	/
Oblik j-ne (1)	$\Sigma\Delta H = \pm\frac{a}{g}\Sigma\Delta V$	$H_x + \frac{1}{g}V_t = 0$	$gH_x + V + \frac{fV}{2D}\lvert V\rvert = 0^*$	$gH_x + V_t + \frac{fV}{2D}\lvert V\rvert = 0^*$	$H_x + \frac{1}{gS}Q_t + \frac{fQ^n}{2gDSn} = 0$	(1)
Oblik j-ne (2)		$V_x + \frac{g}{a^2}H_t = 0$	$\frac{a^2}{g}V_x + V(H_x + \sin\alpha) + H_t = 0^*$	$\frac{a^2}{g}V_x + H_t = 0$	$Q_x + \frac{gS}{a^2}H_t = 0$	(2)
NAPOMENE	- Koristio se do 30-tih godina (istorijski prvi se pojavio) -Važi za horizontalne cevi	-Najpraktičniji metod analize do 60-tih gotina * Može se uvesti trenje preko naknadne korekcije	*Uprošćeni metod karakteristika za VV_x=0 i V(H_x+sinα)=0	-Poseban slučaj metode karakteristika, gde se svaka cev posmatra kao jedna sekcija	- Važi za male poremećaje	-Slična metodi karakteristika

Metod karakteristika predstavlja jedan opšti i moćan metod analize nestacionarnih protoka fluida. Danas se ovaj metod najčešće koristi pri detaljnijim analizama nestacionarnih protoka fluida [1,2,3,9,15,21,22,24]. Parcijalne jednačine:

$$L_1 = gH_x + VV_x + V_t + \frac{fV}{2D}|V| = 0$$

$$L_2 = \frac{a^2}{g}V_x + V(H_x + \sin\alpha) + H_t = 0 \qquad (3)$$

pretvaraju se u četiri obične diferencijalne jednačine. Ove se jednačine potom izražavaju u formi konačnih priraštaja, koristeći metod specificiranih vremenskih intervala, i rešenje se dobija korišćenjem računara.

Model koji koristi metodu karakteristika (ili metodu konačnih priraštaja, tj. implicitnu metodu) omogućuje detaljno posmatranje prelaznih pojava u hidrauličkim sistemima pri nestacionarnim protocima. Rešavanje jednog tako velikog sistema jednačina zahteva obiman i zametan račun. Čak i uz upotrebu savremenih digitalnih računara potrebna memorija i vreme računanja su veliki. Ovako detaljni modeli, koji polaze od najsloženijih oblika jednačine ravnoteže sila i kontinuiteta, koriste se pri projektovanju hidroelektrana i detaljnom ispitivanju uslova njihovog rada.

U zavisnosti od svrhe i cilja istraživanja koriste se i modeli različite složenosti. U velikom broju slučajeva, a pogotovu kada se posmatraju složeni elektroenergetski sistemi, gde hidroelektrana predstavlja samo jedan elemenat sistema, nije potrebna tolika tačnost modela. Nas interesuju uprošćeni modeli, pogodni za računsku obradu i dovoljno tačni, tako da se za odgovarajuće analize rada EES mogu dobiti rezultati zadovoljavajuće tačnosti.

3. ELASTIČNI VODENI UDAR

Partikularna rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina dobijaju se uvođenjem različitih uprošćavajućih pretpostavki. Ovde se posmatra rešenje kada se dobijaju opšte jednačine talasa [1].

Kada se u jednačini kontinuiteta (2) zanemari srednji član [4]:

$$V_x + \frac{g}{a^2}H_t = 0 \qquad (4)$$

a u jednačini ravnoteže sila (1) se zanemari član za trenje i VV_x i V:

$$H_x + \frac{1}{g}V_t = 0 \qquad (5)$$

dobijaju se dve linearne diferencijalne jednačine koje se mogu rešiti.

Uzimajući parcijalni izvod jednačine (4) po x i jednačine (5) po t i eliminišući član H_{tx}, dobija se:

$$V_{u} = a^2 V_{xx} \tag{6}$$

Na sličan način eliminišući V_{tx} dobija se:

$$H_{tt} = a^2 H_{xx} \tag{7}$$

Opšte rešenje ove dve jednačine je oblika:

$$H - H_0 = F\left(t + \frac{x}{a}\right) + f\left(t - \frac{x}{a}\right) \tag{8}$$

$$V - V_0 = -\frac{g}{a}\left[F\left(t + \frac{x}{a}\right) - f\left(t - \frac{x}{a}\right)\right] \tag{9}$$

Funkcije F (t + x/a) i f (t - x/a) su potpuno proizvoljne i mogu se izabrati tako da zadovolje uslove na krajevima cevi.

Jednačine (8) i (9), mogu se koristiti u izvođenju jednačina vodenog udara grafičkom metodom, kao i pri direktnom korišćenju u aritmetičkoj metodi. Jednačine (4) i (5) su polazne jednačine za grafičku metodu.

Deljenjem jednačina (8) i (9) dobija se:

$$\Delta H = -\frac{a}{gS}\Delta Q \frac{F\left(t + \frac{x}{a}\right) + f\left(t - \frac{x}{a}\right)}{F\left(t + \frac{x}{a}\right) - f\left(t - \frac{x}{a}\right)} \tag{10}$$

Kada se posmatraju krajnje tačke cevovoda, tada član x/a postaje L/a, gde je L dužina cevovoda.

Kada se uvede pretpostavka da su F i f u odgovarajućim trenucima istog intenziteta (ova pretpostavka znači da talasi po intenzitetu ne slabe, tj. zanemareni su kinetički gubici, gde je energija gubitaka u cevovodu srazmerna kvadratu protoka $H_c = K_c Q^2_c$, koji se izražavaju kao promena pada), sledi:

$$\Delta H = -\frac{a}{gS}\Delta Q \frac{\overline{H}\left(t + \frac{L}{a}\right) + \overline{H}\left(t - \frac{L}{a}\right)}{\overline{H}\left(t + \frac{L}{a}\right) - \overline{H}\left(t - \frac{L}{a}\right)} \tag{11}$$

gde je $\overline{H}$ jedinična funkcija čistog kašnjenja.

Razlomak u gornjoj jednačini može se pisati u operatorskoj formi kao:

$$\frac{e^{+p\frac{L}{a}}+e^{-p\frac{L}{a}}}{e^{+p\frac{L}{a}}-e^{-p\frac{L}{a}}}=\text{th}\ p\frac{L}{a}$$

pa je:

$$\Delta H=-\frac{a}{gS}\Delta Q\ \text{th}\ p\frac{L}{a} \tag{12}$$

Jednačina (12) je jednačina elastičnog vodenog udara u operatorskom obliku.

U ruskoj literaturi [5], ova jednačina u relativnim jedinicama je oblika:

$$h=-2\,\rho g\ \text{th}\frac{1}{2}p\tau \tag{13}$$

gde su:

$2\,\rho=\dfrac{aQ}{gHS}=\dfrac{aV}{gH}$ - karakteristika cevovoda

$\tau=2\theta=\dfrac{2L}{a}$ - trajanje faze udara

U američkoj literaturi [6] je:

$$-h=\frac{T_w}{T_e}q\ \text{th}\ pT_e \tag{14}$$

gde su:

T_e - vreme putovanja talasa

T_w - vremenska konstanta cevovoda

Često se koristi i oblik jednačine (14) kada se preko koeficijenta trenja F uzima trenje u obzir [7]. Tada je:

$$-h=\frac{T_w}{T_e}q\ \text{th}\ (T_e p+F) \tag{15}$$

Jednačina elastičnog vodenog udara (14) ili (15) se uprošćava razvojem u red funkcije th x. Kada se funkcija th x = sh x/ch x razvije u Maklorenov red, dobija se iz (14) izraz [8]:

$$h=-pT_w\frac{1+p^2\frac{2^2}{24}}{1+p^2\frac{2^2}{8}}q \tag{16}$$

odnosno iz (15) sa trenjem [7]:

$$-Q=\left[\frac{6+3F^2}{T_wT_e^2p^3}+\frac{6F}{T_wT_ep^2}+\frac{3}{T_wp}\right]H+\left[\frac{6F+F^3}{T_e^3p^3}+\frac{6F+3F^2}{T_e^2p^2}+\frac{3F}{T_ep}\right]Q \tag{17}$$

koja se pretvara u tri jednačine u prostoru stanja po q_1, q_2 i q_3.

Kada se u jednačini (14) th x aproksimira Padeovom aproksimacijom prvog reda:

$$e^{-x}=\frac{1-x/2}{1+x/2}$$

dobija se:

$$\frac{h}{q}=\frac{-T_w}{T_e}\,\mathrm{thp}T_e=-\frac{T_w}{T_e}\frac{x}{2}=-T_wp$$

odnosno:

$$h=-T_wpq \tag{18}$$

Jednačina (18) predstavlja jednačinu za kruti (tvrdi) vodeni udar. Do ove jednačine se može doći i preko jednačina kontinuiteta i ravnoteže sila.

4. KRUTI VODENI UDAR

Posmatra se jednačina kontinuiteta (2′) u kojoj je zanemaren srednji član:

$$Q_x+\frac{gS}{a^2}H_t=0 \tag{19}$$

Vidi se da je promena protoka sa rastojanjem osetna (velika), tek kada je promena pada u vremenu velika. Često se uvodi pretpostavka o nestišljivosti vode i apsolutnoj krutosti cevovoda [4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,17,19,20,23,25,26], kada postaje:

$$Q_x\approx 0$$

U ovom slučaju iz jednačine (19) sledi:

$$H_t\approx 0$$

te jednačina kontinuiteta nestaje.

Jednačina ravnoteže (1′) u kojoj se zanemaruje trenje prelazi u znatno prostiji oblik:

$$H_x+\frac{1}{gS}Q_t=0 \tag{20}$$

Pretpostavka o nestišljivosti vode i apsolutnoj krutosti cevovoda opravdana je u sledećim slučajevima:

- kada su promene pritiska sasvim male, pa se član H_x može zanemariti,
- kada je cevovod kratak,
- kada su promene pritiska i protoka srazmerno spore (kao što je npr. slučaj kod

dovodnog tunela).

Kada se jednačina (20) integrali po dužini i pređe na relativne vrednosti, dobija se:

$$h = \frac{Q_0}{gH_0} \int_L \frac{dx}{S} \frac{dq}{dt}$$

odnosno:

$$h = -T_w \frac{dq}{dt} \tag{21}$$

gde je:

$$T_w = \frac{Q_0}{gH_0} \int_L \frac{dx}{S}$$ - vremenska konstanta inercije cevovoda

Za slučaj kada se cevovod sastoji iz više delova različitog preseka je:

$$T_w = \frac{Q_0}{gH_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{L_i}{S_i} \tag{22}$$

a u najprostijem slučaju, kada celom dužinom L imamo presek S:

$$T_w = \frac{Q_0}{gH_0} \frac{L}{S} = \frac{v_0 L}{gH_0}$$

4.1. Uticaj elastičnosti na rezultate proračuna hidrauličkog udara

Hidraulički udar se može razmatrati kao kruti udar ili elastični udar. Proračun pomoću jednačina krutog udara je znatno jednostavniji, pa je značajno odrediti granicu primenljivosti ovih uprošćenih izraza. To je najjednostavnije utvrditi na primeru prostog cevovoda pri linearnoj promeni protoka sa vremenom Q (t).

Kada se uvedu T_w i vreme zatvaranja i otvaranja zatvarača na kraju cevovoda T_z, relativni porast pritiska usled hidrauličkog udara je:

$$\xi = \frac{\Delta h}{h_0} = \frac{h_{i,k} - h_{i,0}}{h_{i,0}} \tag{23}$$

broj faza zatvaranja $n = \frac{T_z a}{2L} = \frac{T_z}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{l_i}$, relativni protok $q = \frac{Q}{Q_0}$ i $\mu = \frac{T_w n}{T_z} = \frac{a Q_0}{g H_0 A}$.

Kada se gornji izrazi zamene u jednačine:

$$h_{B,(K+1)} - h_{A,K} = -\frac{a_i}{gA_i}\left[Q_{B,(K+1)} - Q_{A,K}\right]$$

(24)

$$h_{B,(K-1)} - h_{A,K} = -\frac{a_i}{gA_i}\left[Q_{B,(K-1)} - Q_{A,K}\right]$$

dobija se:

$$\xi_{B,K} - \xi_{A,(K+1)} = 2\mu\left(q_{B,K} - q_{A,(K+1)}\right)$$

(25)

$$\xi_{A,K} - \xi_{B,(K+1)} = -2\mu\left(q_{A,K} - q_{B,(K+1)}\right)$$

Jednačine (25) su rekurentne jednačine pogodne za numeričko sračunavanje. Na osnovu njih se za razne vrednosti T_w/T_z = const može sračunati ξ pri različitom broju faza n, što praktično znači za različite vrednosti brzine prostiranja talasa a. Na slici 1. dat je dijagram sračunatih vrednosti [16].

Sa slike 1. može se zaključiti :

- Brzina prostiranja talasa nema uvek uticaja na veličinu promene pritiska (zona desno od crtkaste linije abc)
- Pri otvaranju cevovoda (turbine) kada je $2T_w/T_z \geq 0$, porast pritiska $\Delta H/H_0 > 0$ pri n > 3 - 4 ne zavisi više od broja faza n. Za $2T_w/T_z < 0{,}8 – 0{,}4$ elastičnost sistema nema uticaja na udar ako je n > 4 – 6. Kada je $2T_w/T_z < 0{,}4$ uticaj elastičnosti je zanemarljiv ako je n > 6 – 8.
- Pri otvaranju cevovoda (turbine) pad pritiska $\Delta H/H_0 < 0$ ne zavisi od brzine prostiranja talasa za sve vrednosti n.

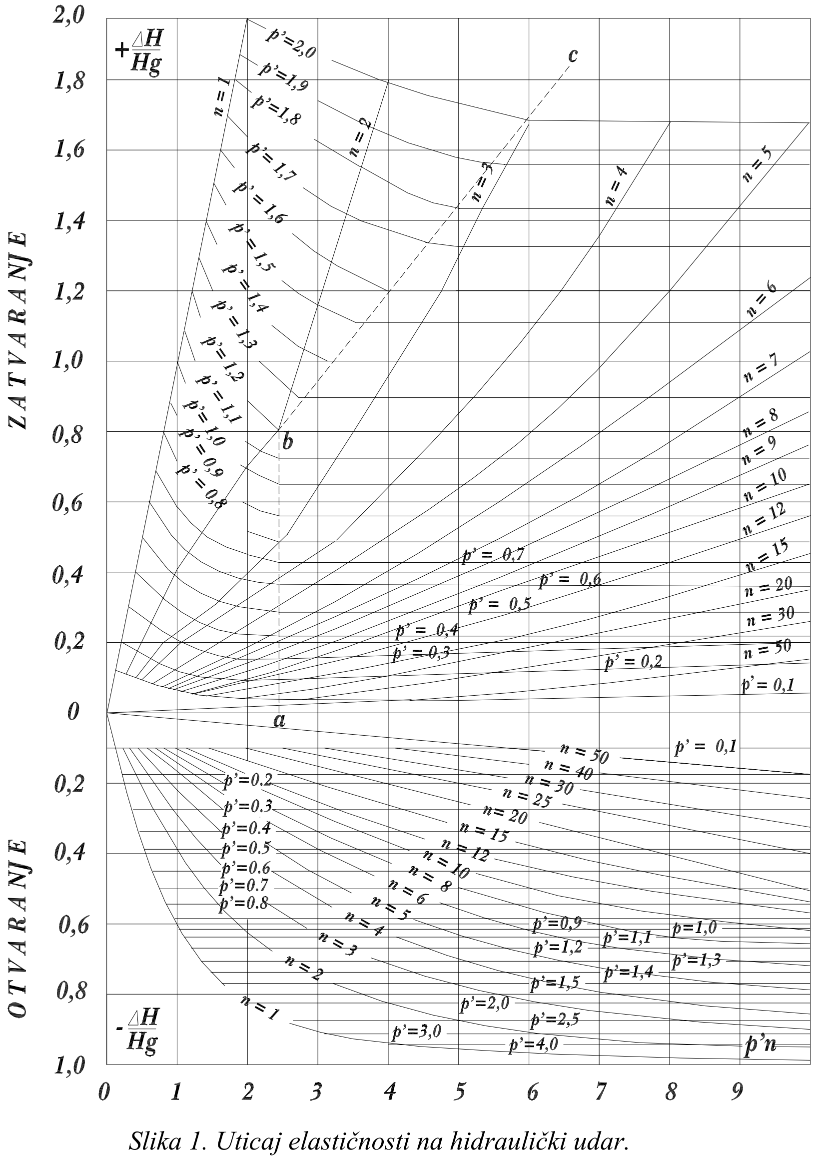
4.2. Pregled karakteristika

Dalja dopuna izloženih metoda sa pretpostavkama pod kojima važe i karakteristikama data je u Tabeli 2.

5. ZAKLJUČCI

U radu je izložen pregled matematičkih modela hidrauličkih sistema hidroelektrana. Opšti nelinearni matematički model hidrauličkog sistema obuhvata jednačinu kretanja i jednačinu kontinuiteta. Izložen je pregled metoda za rešavanje ovih jednačina, sa posebnim osvrtom na metodu karakteristika, kao najčešće korišćenu metodu za analize nestacionarnih protoka fluida. Na kraju su izloženi prostiji matematički modeli hidrauličkih sistema zasnovani na teoriji elastičnog i krutog vodenog udara. Dat je uporedni pregled karakteristika izloženih metoda i analiza uticaja elastičnosti vode na rezultate proračuna hidrauličkog udara.

$$p'n = 2\mu = \frac{2T_w}{T_z}n \qquad p' = \frac{2T_w}{T_z}$$



Slika 1. Uticaj elastičnosti na hidraulički udar.

Tabela 2. Pregled metoda sa pretpostavkama i karakteristikama

METODA ---------------------- **PRETPOSTAVKE**	**ELASTIČNI VODENI UDAR**	**KRUTI VODENI UDAR**
Zanemarenje trenja	DA**	DA**
Zanemarenje VV_x	DA	DA
Zanemarenje $V(H_x + \sin\alpha)$	DA	DA
Nestišljiva voda i apsolutno krut cevovod ($Q_x \approx 0$)	/	DA
Jednačina ravnoteže sila	$H_x + \frac{1}{g} V_t = 0$	$H_x + \frac{1}{gS} Q_t = 0$
Jednačina kontinuiteta	$V_x + \frac{g}{a^2} H_t = 0$	$H_t = 0$
Jednačina modela	$-h = \frac{T_w}{T_e}\left[\mathrm{th} T_e p\right] q^*$	$h = -T_w \frac{dq^*}{dt}$
NAPOMENA	* U ruskoj literaturi koristi se identična jednačina $-h = 2\rho\left(\mathrm{th}\,\frac{1}{2}\tau\, p\right) q$ ** Trenje u cevima može se uzeti u obzir uvođenjem koeficijenata trenja F. Tada je jednačina $-h = \frac{T_w}{T_e}\left[\mathrm{th}\,(T_e p + F)\right] q$	* Lindal polazi od Bernulijeve jednačine $L\frac{dv_t}{dt} + \frac{1}{2}\nu_t^2 - gh = 0$ koja se dobija iz jednačine ravnoteže sila, i dobija jednačinu $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{T_w}\left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)$ $P = P_{max} V^3/a^2$ ** Borel polazi od jednačine količine kretanja fluida $\frac{d}{dt}(SV\mu\, dL) = -SdP$ μ - masa po jedinici zapremine dP - razlika pritiska između donjeg i gornjeg sloja elementa zapremine, koja nastaje usled promene brzine. Uvodi gubitke pritiska u cevovodu, odnosno ekvivalentan pad usled gubitka u cevovodu (to su gubici usled trenja o cevovod između slojeva vode).

LITERATURA

[1] E.B. Wylie, V.L. Streeter, *Fluid Transients*, Mc Graw – Hill Co, New York, 1978.

[2] M.H. Chaudhry, *Applied Hydraulic Transients*, Van Nostrand Reinhold Co, New York, 1979.

[3] V.L. Streeter, E.B. Wylie, *Hydraulic Transients*, McGraw Hill Co, New York, 1967.

[4] R. Milijanović, D. Arnautović, S. Bogdanović, V. Vučković: ″Matematički modeli objekata EES″, Studija Instituta ″Nikola Tesla″, Beograd, 1981.

[5] B.A. Davidson, V.A. Pivovarov: ″Rasčet garanti regulirovanija radialno – osevih gidroturbin na elektronom modeli″, *Zbornik radova LMZ, Gidroturbostoenie* No12, Mašinostroenie, Leningrad, 1969.

[6] J.L. Woodward: ″Hydraulic – turbine transfer function for use in governing studies″, *Proc. IEE*, Vol 115, No3, 1968.

[7] L. Wozniak, G. Fett: ″Optimal Gate Closure Schedule for Hydroelectric Turbine System″, *Journal of Fluids Engineering*, March, 1973.

[8] E.M. Novoselov, V.A. Pivovarov: ″Rasčet ustoičivosti regulirovanija skorosti gidroagregatov″, *Zbornik radova LMZ, Gidroturbostroenie* No 12, Leningrad, 1969.

[9] G.I. Krivčenko, N.N. Aršenevski, B.V. Kvjatkovskaja, V.M. Klabukov: ″Gidromehaničeskie perehodnie procesi gidroenergetičeskih ustanovkah″, *Energija,* Moskva, 1975.

[10] L. Borel, Stabilite de reglage des instalations hydroelectriques, Dunad, Paris, 1960.

[11] B.N. Šelopugin: ″K voprosu o peredatoči funkciji gidroagregata″, *Zbornik radova LMZ, Gidroturbostroenie* No12, Leningrad, 1969.

[12] B.E. Safarov, ″Rasčeti režimov regulirovanija gidroagregatov na CSM«, *Energija*, Moskva, 1967.

[13] D.G. Ramey, J.W. Skooglund, ″Detailed Hydrogovernor Representation for System Stability studies″, *PAS*, Vol 89, No1, Jan. 1970.

[14] N.N. Aršenevski, S.I. Levina, G.I. Nudeljman, ″Osobenosti procesov zbrosa nagruski kapsulnih gidroagregatov″,15 – 17.

[15] S. Pejović, *Hidraulički udar i prelazni režimi hidropostrojenja*, Institut Mašinskog fakulteta, Beograd, 1977.

[16] V.M. Klabukov, ″O vlijaniji uprugosti židkosti i oboločki vodovoda na veličinu gidravličeskova udara″, *Zbornik trudov MISI*, No35, 1961.

[17] S. Lindahl, ″A state space model of multimachine power system″, Report 7118, Division of Automatic Control, Lund institute of technologhy, 1971.

[18] V. Jordan, *Prehodni režimi v hidrauličnih cevnih sistemih*, Partizanska knjiga, Ljubljana, 1983.

[19] D. Arnautović, R. Milijanović, ″An approach to the analysis of large perturbations in hydroelectric plants with Kaplan turbines″, *Electric Power Systems Research*, Vol. 9, No 2, pp. 115-121, 1985.

[20] R. Milijanović, D. Arnautović, B. Ignjatović, ″Analysis of Transient Processes for Bulb Turbine Governor Systems″, *13th Symposium of IAHR*, Montreal, Canada, 1986, paper No 28.

[21] D. Obradović, D. Arnautović, S. Pejović, A. Gajić, ″Mathematical modelling of transient regimes in multiunits hydro power plants″, *14th Symposium of IAHR*, Trondheim, Norge, 1988, pp. 163-175.

[22] D. Arnautović, D. Obradović, ″A Nonlinear Mathematical Model of Transient Regimes in Multi-machine Hydro Power Plant″, *Int. Conf. on Hydraulic Machinery*, Ljubljana, 1988, pp. 461-470.

[23] D. Arnautović, D. Škatarić: ″Suboptimal Design of Hydroturbine Governors″, *IEEE Trans. on Energy Conversion*, Vol. 6, No 3, Sept. 1991, pp. 438-444.

[24] D. Arnautović, ″Analiza prelaznih procesa višeagregatnih hidroelektrana″, *Zbornik radova INT*, Vol. 9, Beograd, 1991, str. 157-165.

[25] D. Arnautović, S. Bogdanović, I. Stevanović, ″Projektovanje regulatora agregata″, Monografija *Planiranje i eksploatacija EES-a,*. Izabrana poglavlja, Beograd, 1995, str. 87-94.

[26] D. Arnautović, S. Bogdanović, P. Ristanović, ″Sinteza turbinskih regulatora hidroagregata″, *Zbornik radova INT*, Vol. 12-13, Beograd, 1998, str. 69-76.

Abstract: The review of the mathematical models of hydraulic systems in hydro power plants is given in the paper. A general nonlinear mathematical model of hydraulic system is presented, which consist of two basic differential equations for transient water flow: equations of motion and continuity. The review of the methods available for their solution are discussed, especially the method of characteristics, as the most used method for hydraulic unsteady flow analyses. Also, the simplier models based on elastic and rigid waterhammer theory are presented. The review of their characteristics is presented, including the analysis of water elasticity on waterhammer analyses.

MATHEMATICAL MODELS OF HYDRAULIC SYSTEMS IN HYDRO POWER PLANTS

Dušan Arnautović