

Merenje određenog integrala proizvoda dva ili više signala dvobitnim A/D konvertorom

Boris Ličina¹, Platon Sovilj², Vladimir Vujičić²

¹A.D. Apatinska pivara Apatin, Trg Oslobođenja 5, 25260 Apatin, Srbija
boris.licina@yahoo.com

²Fakultet tehničkih nauka, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija “
platon@uns.ac.rs, vujicicv@uns.ac.rs

Kratak sadržaj: Članak predstavlja teoriju rada dvobitnog stohastičkog konvertora. Ovaj konvertor se može koristiti za precizna i tačna merenja efektivnih vrednosti (root-mean-square – srednje kvadratne vrednosti) napona, struje, električne snage ili energije, što se primenjuje u mrežnim merenjima. Ključni doprinos rada ogleda se u teorijskom izvođenju granica greške merenih signala koristeći stohastičku metodu. Standardna devijacija merenih vrednosti tokom određenog perioda merenja definiše se kao greška. Kada tražimo izraze za merenu vrednost i njenu grešku, vreme se tretira kao nezavisna uniformna slučajna promenljiva, tako da se može primeniti teorija verovatnoće i statistička teorija uzoraka. Ovi uslovi su neophodni jer je predstavljeni problem veoma nelinearan i stohastički. Zbog toga se on ne može rešiti ni linearnom teorijom diskretnih signala i sistema, niti teorijom slučajnih procesa. Predstavljeno rešenje je generalizovano, kako bi se uključilo merenje određenog integrala proizvoda konačnog broja signala.

Ključne reči: A/D konverzija, tehnika diterovanja, sampling metoda, verovatnoća, statistika

1. Uvod

Pod pojmom merenje danas se, u metrologiji, podrazumeva diskretno digitalno merenje (merenje u tački), odnosno merenje sampling metodom. Sampling metoda ima dva uzroka sistematske greške: diskretizaciju po vremenu i diskretizaciju po vrednosti.

Diskretizacija po vremenu se može eliminisati kao uzrok sistematske greške ako su zadovoljeni uslovi teoreme o odabiranju (uzorkovanju, semplovanju, samplingu). Da bi bili zadovoljeni uslovi teoreme o odabiranju, neophodno je da frekvencija uzorkovanja (semplovanja) f_s bude bar dvostruko

veća od maksimalne frekvencije koja se javlja u merenom signalu, odnosno gornje granice frekvencijskog opsega merenog signala f_g , tj. da bude zadovoljen uslov $f_s \geq 2 \cdot f_g$. Drugim rečima, važno je da vremenski interval između dva uzorkovanja $\Delta t = 1 / f_s$ bude što je moguće manji, što se postiže fleš A/D konvertorima kod kojih je $\Delta t \approx 1ns$, pa je $f_s \approx 1GHz$.

Diskretizacija po vrednosti, sa druge strane, uvek prouzrokuje sistematsku grešku koju nije moguće u potpunosti eliminisati, ali ju je moguće, pod određenim uslovima, držati u okviru željenih granica.

Standardna strategija merenja u tački razdvaja pristup merenja signala i njegovih parametara – u odabranom trenutku vremena potrebno je digitalno merenje signala maksimalne (teorijski idealne) tačnosti. U cilju da dobijemo potpune informacije o merenoj veličinu, moraju biti zadovoljeni svi uslovi teorije uzorkovanja. Matematika koja objašnjava ovaj pristup je algebra, a primenjena je teorija diskretnih signala i sistema. Ova strategija merenja je okosnica razvoja u metrologiji, upravljanju, telekomunikacijama, itd.

Strategija "merenje na intervalu" formulisana u [1] ima izražene prednosti u odnosu na standardni pristup "merenje u tački" u tri bitne oblasti:

- a) merenja brzo promenljivih signala,
- b) merenja signala šuma,
- c) za merenja koje zahtevaju veliku preciznost i linearnost.

Treći slučaj je od najvećeg značaja u metrologiji i razrađen je u [2], gde je pokazano kako da sistematske greške držimo u okviru prihvatljivih granica. Poznato je da se sa svakim novim bitom rezolucije duplira hardver fleš A/D konvertora, odnosno izvori sistematskih grešaka, a merenje na intervalu podrazumeva veoma jednostavan hardver (fleš A/D konvertor niske rezolucije). Merenje na intervalu je integralni pristup za merenje signala i njegovih parametara - signal [3] ili neki od njegovih parametara [2] se mere u toku konačnog vremenskog intervala proizvoljnog trajanja. Pokazano je da jedinstvenost merenja u svakom trenutku ne mora da bude maksimalno precizna, dok je merna nesigurnost smanjena dodavanjem ditera, analognog signala uniformne raspodele amplituda (slučajnog šuma), na ulazni signal pre A/D konverzije. Matematički alati korišćeni u ovom slučaju su matematička analiza, teorija verovatnoće, statistika i teorija uzorkovanja. Osnova pristupu merenja ovog tipa je definisana Weierstrass-ovom aproksimacionom teoremom, a strategija je zasnovana na množenju dva signala i integraljenju njihovog proizvoda na konačnom vremenskom intervalu.

Predstavljeno rešenje je generalizovano izloženom teorijom za integraciju proizvoda više od dva signala korišćenjem dvobitnog fleš A/D konvertora - najjednostavnijeg i najbržeg, ali najmanje preciznog uređaja. Otuda je problem veoma nelinearan i stohastički, pa se ne može primeniti ni standardna linearna teorija diskretnih signala i sistema, niti teorija slučajnih procesa. Treba da se razvija alternativni pristup. U suštini, koristi se centralna granična teorema [4] koja je granična statistička teorema ($N \rightarrow \infty$), a koja, zbog velike brzine savremenih elektronskih kola, može da se primeni i na realno kratkim intervalima vremena čime postaje praktično vrlo upotrebljiva.

Matematika prikazana u ovom radu izgleda složena, pošto se vreme na intervalu merenja tretira kao nezavisna uniformna slučajna promenljiva.

Tabela 1. Za dalja razmatranja, uvedimo sledeće oznake

Y	merena vrednost
R	opseg ulazne vrednosti
Z	broj pozitivnih kvantnih nivoa
a	kvantum fleš A/D konvertora uniformnog kvantizera
h	uniformni slučajni signal (diter)
$p(h)$	funkcija gustine verovatnoće signala h
na	n - ti kvantni nivo
$(n+1)a$	$n+1$ - vi kvantni nivo
$ \Delta a $	udaljenost merenog signala y od najbližeg kvantnog nivoa
Ψ	izlaz uniformnog kvantizera / digitalnog množača
$\bar{\Psi}$	srednja vrednost izlaza uniformnog kvantizera / digitalnog množača
P	verovatnoća ili funkcija verovatnoće
Ψ_n	na - izlaz uniformnog kvantizera
Ψ_{n+1}	$(n+1)a$ - izlaz uniformnog kvantizera
σ_y	standardna devijacija signala y
σ_e	standardna devijacija greške kvantizacije diterovanog ulaznog signala
σ_ψ	standardna devijacija izlaza uniformnog kvantizera
E	greška kvantizacije diterovanog signala y
$+g, -g$	odluka nivoa (prag napona) u 2-bitnom fleš A/D konvertoru
b_1, b_{-1}	pragovi komparatora 2-bitnog fleš A/D konvertora
ON	ograničavač nivoa
\bar{x}, \bar{y}	srednja vrednost signala x i y
dp_x	elementarna (diferencijalna) verovatnoća da se desi x
dp_t	elementarna (diferencijalna) verovatnoća da se desi t
$dp_{x/t}$	uslovna (diferencijalna) verovatnoća da se desi x ako se desi t
$p(x)$	gustina verovatnoće funkcije P_x
$p(t)$	gustina verovatnoće funkcije P_t
$p(x/t)$	gustina verovatnoće funkcije $P_{x/t}$
δ	Dirakova delta funkcija
$\varphi(t)$	oblik signala x
M_3	treći centralni momenat greške kvantizacije
K	velika realna pozitivna konstanta
N	konačan broj uzoraka

U proteklih petnaest godina na Katedri za električna merenja Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu brojne simulacije, eksperimenti i razvoj mernih instrumenata su dokazali primenljivost metodološkog pristupa "merenje na intervalu" [2, 3, 5]. Realizovani merni instrumenti koji rade na ovom principu koriste se za sledeća merenja:

- merenje efektivne vrednosti računanjem srednje vrednosti

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

- merenje aktivne snage računanjem srednje vrednosti

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt$$

- merenje aktivne energije računanjem određenog integrala

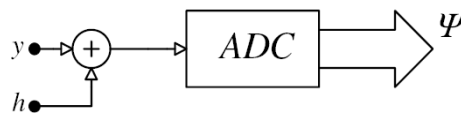
$$E = \int_0^T u(t)i(t) dt$$

- te izračunvanjem koeficijenata ortogonalne transformacije

$$A_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t) dt \quad i \quad B_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt$$

2. Uniformni kvantizer i uniformni slučajni diter u DC režimu

Slika 1 prikazuje princip dodavanja deterskog signala h merenom signalu y . Uloga ditera je da statistički raspregne grešku kvantizacije uniformnog kvantizera i ulazni signal [6], kao i da omogući precizno merenje korišćenjem konvertora niske rezolucije [2].



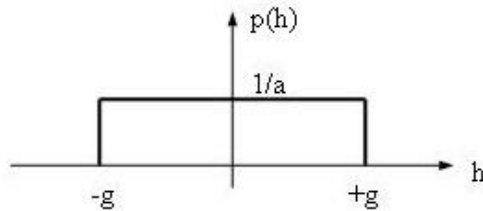
Sl. 1. Blok dijagram primene slučajnog ditera h na mereni signal y

Neka je deterski signal slučajan i uniformne raspodele gustine verovatnoće

$p(h) = \frac{1}{a}$ za $|h| \leq \frac{a}{2}$, tada ga možemo grafički interpretirati kao na slici 2,

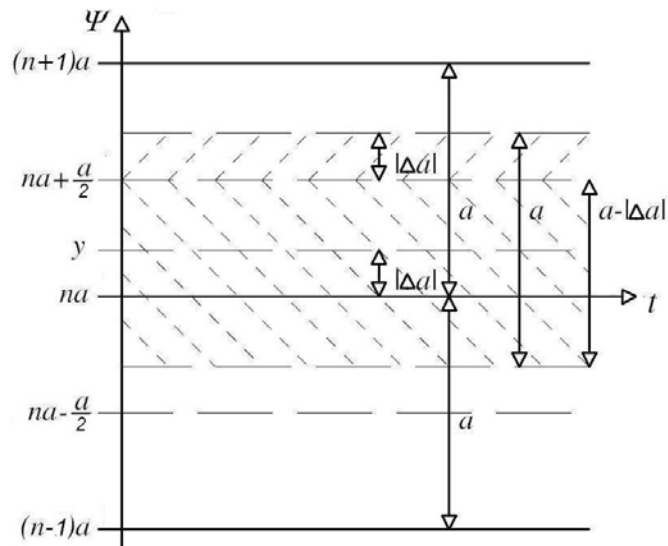
gde je sa $a = 2g$ označen kvant uniformnog kvantizera. Tada važi:

$$|y| \leq R, \quad R = Za, \quad |y + h| = R + \frac{a}{2} \quad (1)$$



Sl. 2. Gustina raspodele deterskog signala h

Proces merenja srednje vrednosti uniformnog kvantizera i pripadajuće pragove odlučivanja možemo grafički predstaviti kao na slici 3.



Sl. 3. Geometrijska reprezentacija procesa merenja $\bar{\Psi}$

Lema 1: Ako je: $y = const = na + |\Delta a|$ onda je: $\bar{\Psi} = na + |\Delta a| = y$.

Dokaz L1:

$$\bar{\Psi} = \Psi_{n+1} \cdot P(\psi_{n+1}) + \Psi_n \cdot P(\psi_n)$$

$$\bar{\Psi} = (n+1)a \cdot \frac{|\Delta a|}{a} + na \cdot \frac{a - |\Delta a|}{a} = na + |\Delta a| = y$$

što je trebalo da bude dokazano. To je slučaj konstantnog ulaza u konvertor. Dakle, srednja vrednost (matematičko očekivanje) izlaza iz kvantizera na čijem ulazu je diterovan jednosmerni napon y je upravo jednaka merenoj vrednosti!

Lema 2: Varijansa (srednja kvadratna greška ili standardna devijacija) slučajne promenljive Ψ (izlaza fleš A/D konvertora) je

$$\sigma_{\Psi}^2 = |\Delta a| \cdot (a - |\Delta a|), \quad y = const$$

Dokaz L2: Označimo $\Psi_i - \bar{\Psi} = e_i$, ($i = n, n + 1$) tada je varijansa:

$$\overline{e^2} = \sigma_{\Psi}^2 = (\Psi_{n+1} - \bar{\Psi})^2 \cdot P(\psi_{n+1}) + (\Psi_n - \bar{\Psi})^2 \cdot P(\psi_n)$$

$$\overline{e^2} = (a - |\Delta a|)^2 \cdot \frac{|\Delta a|}{a} + |\Delta a|^2 \cdot \frac{a - |\Delta a|}{a}$$

$$\sigma_{\Psi}^2 = (a - |\Delta a|) \cdot |\Delta a|$$

što je trebalo da bude dokazano. To pokazuje koliko je daleko od sredine svaki rezultat merenja (definisano kao greška).

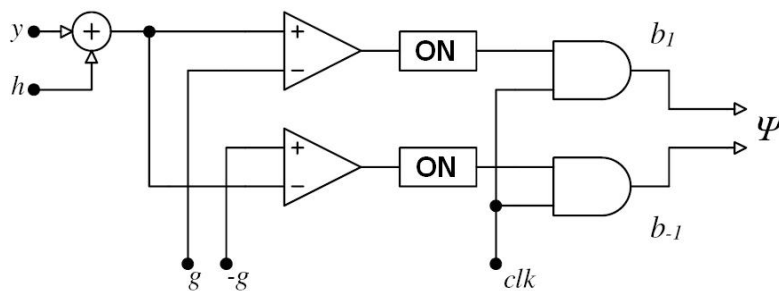
Posledica 1: Može se videti da je za svaki $|y| \leq R$ varijansa $\sigma_{\Psi}^2 \leq \frac{a^2}{4}$, tj.

$$\sigma_{\Psi}^2 = \overline{e^2} = \overline{(\Psi - \bar{\Psi})^2} = \overline{\Psi^2} - 2\overline{\Psi\bar{\Psi}} + \bar{\Psi}^2 = \overline{\Psi^2} - 2\bar{\Psi}\bar{\Psi} + \bar{\Psi}^2 = \overline{\Psi^2} - \bar{\Psi}^2$$

$$\sigma_{\Psi}^2 = \overline{\Psi^2} - y^2 \leq \frac{a^2}{4} \Rightarrow \overline{\Psi^2} \leq y^2 + \frac{a^2}{4}$$

Ovo je veoma važna karakteristika gore opisanog mernog procesa. U ovom slučaju ulazni signal y više nije konstantan nego ima opseg vrednosti.

Posledica 2: Kako Z (broj pozitivnih nivoa kvantizacije) nije naveden, sve gornje važi i za $Z = 1$. U tom slučaju, fleš A/D konvertor je veoma jednostavan, sa minimalnim hardverom kao što je prikazano na slici 4.



Sl. 4. Dvo-bitni fleš A/D konvertor sa dodatim uniformnim diterom

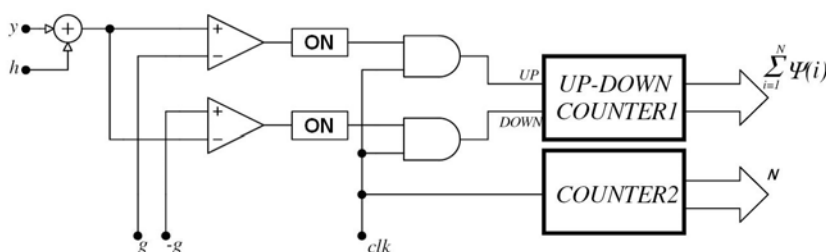
Za konvertor na slici 4 važi sledeće:

$$a = 2g \text{ tj. } g = \frac{a}{2}, \quad R = a = 2g, \quad p(h) = \frac{1}{2g} \quad (2)$$

Moguće vrednosti za Ψ su $\Psi \in \{-2g, 0, 2g\}$, a analitički izraz za Ψ je:

$$\Psi = 2g \cdot (b_1 - b_{-1}) \quad (3)$$

gde $b_1, b_{-1} \in \{0, 1\}$ i $b_1 \cdot b_{-1} = 0$, odnosno nikada nije moguće da b_1 i b_{-1} istovremeno uzmu vrednost 1 - to bi značilo da je istovremeno $y \geq 0$ i $y \leq 0$, što je nemoguće (za bilo koji ulazni signal $y \neq 0$).



Sl. 5. Merenje srednje vrednosti signala izlaza dvo-bitnog fleš A/D konvertora

$$\bar{\Psi} = \frac{\langle \text{COUNTER1} \rangle}{\langle \text{COUNTER2} \rangle} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Psi(i)$$

Ako frekvencija uzorkovanja teži beskonačnosti i ako su registri beskonačne dužine, onda je: $\bar{\Psi} = y$. Ovaj odnos važi i ako je frekvencija uzorkovanja konačna, a vreme merenja beskonačno dugo. Ključno pitanje je kolika je razlika između $\bar{\Psi}$ i y ako su i frekvencija uzorkovanja i interval merenja konačni. Primetimo da funkcija $y = c$ nije monotona i nema inverznu funkciju, koja je neophodna za dobijanje funkcije gustine verovatnoće (PDF), što bi omogućilo direktnu primenu centralne granične teoreme u cilju procene merne nesigurnosti.

3. Opšti slučaj ograničene funkcije na konačnom intervalu

Lema 3: Neka je $x = \varphi(t)$ ograničena integrabilna funkcija na intervalu $t \in [t_1, t_2]$. Njena srednja vrednost na intervalu je: $\bar{x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) dt$ bez obzira da li je t deterministička promenljiva ili slučajna promenljiva uniformne

raspodele čija je funkcija gustine verovatnoće (PDF): $p(t) = \frac{1}{t_2 - t_1}$.

Dokaz L3: Ako je vreme t deterministička promenljiva, dokaz je trivijalan i svodi se na definiciju.

Ako je t slučajna promenljiva uniformne raspodele čija je PDF $p(t) = \frac{1}{t_2 - t_1}$,

tada je i x slučajna promenljiva i to zavisna od t . U opštem slučaju, važi sledeće:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx \quad (4)$$

gde je $p(x)$ funkcija gustine raspodele verovatnoće slučajne veličine x , a $dP_x = p(x)dx$ elementarna verovatnoća, odnosno diferencijal funkcije raspodele verovatnoće slučajne veličine x .

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dP_x \quad (5)$$

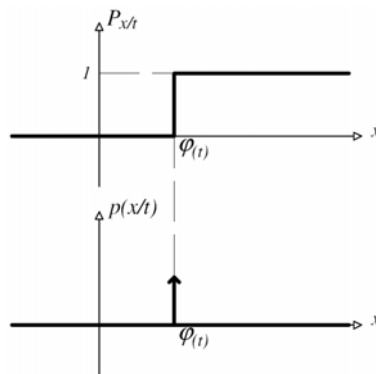
Kako je x zavisno od t to važi

$$dP_x = dP_{x/t} \cdot dP_t = p\left(\frac{x}{t}\right) \cdot p(t) \cdot dx \cdot dt \quad (6)$$

Prema uslovima teoreme $p(t) = \frac{1}{t_2 - t_1}$, ali šta je $p(x/t) = \frac{\partial P(x/t)}{\partial t}$?

Sa slike 6 može se videti:

$$p(x/t) = \delta(x - \varphi(t)) \quad (7)$$



Sl. 6. Ilustracija događaja $x = \varphi(t)$ kada se desi t

Simbolički integral: $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dP_x$ postaje u stvari:

$$\bar{x} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \delta[x - \varphi(t)] \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot dx \cdot dt \quad (8)$$

Ako ovaj integral postoji, redosled integracije je irelevantan, dakle:

$$\bar{x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \delta(x - \varphi(t)) \cdot dx = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) dt \quad (9)$$

što je trebalo da bude dokazano. Ovaj izraz uvodi interval merenja, a ne tačku, kao pojam bitan za merenje rezultata. Uočimo da je trenutak u kome se merenje vrši slučajna promenljiva uniformne raspodele na datom intervalu.

Teorema 1: Neka je $y = f(t)$ ograničena integrabilna funkcija i h uniformni slučajan signal, koji zadovoljavaju uslove (1). Tada je srednja vrednost izlaza

fleš A/D konvertora prikazana na sl.1, $\bar{\Psi}$ data kao: $\bar{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$

Dokaz T1: Na osnovu gore dokazane leme tretiraćemo vreme kao slučajnu promenljivu. Ψ je slučajna promenljiva koja zavisi od y i h , dok y takođe zavisi od t .

$\bar{\Psi} = \int_{-R_1}^R \Psi dP_{\Psi}$ je simbolički integral. Elementarna verovatnoća da se Ψ desi je:

$$dP_{\Psi} = dP_y \cdot dP_h = dP_{y/t} \cdot dP_t \cdot dP_h \quad (10)$$

a uz $dP_{\Psi} = \delta(y - f(t)) \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{1}{2g} \cdot dy \cdot dt \cdot dh$ simbolički integral postaje pravi:

$$\bar{\Psi} = \int_{-R_1}^{+R_1} \int_{\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{t_1}^{t_2} \Psi \cdot \delta(y - f(t)) \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{1}{a} \cdot dy \cdot dt \cdot dh \quad (11)$$

Ako ovaj integral postoji, redosled integracije je irelevantan, dakle:

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-R}^R \delta(y - f(t)) \cdot dy \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Psi \cdot \frac{dh}{2g} \quad (12)$$

Zbog Leme 1, sledi da je: $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Psi \frac{dh}{2g} = y$, ako je $y = const$, onda je :

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-R}^R y \cdot \delta(y - f(t)) dy \quad (13)$$

t.j:

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \bar{y} \quad (14)$$

što dokazuje T1. Primetimo da je $\bar{\Psi} = \bar{y}$, što ukazuje da uređaj prikazan na slici 5 meri srednju vrednost signala na intervalu.

Teorema 2: Neka je $Z=1$, a standardna devijacija (srednja kvadratna greška) e pojedinačnog merenja y je $e = \psi - y$. Tada je:

$$\sigma_e^2 = \frac{2g}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)| dt - \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt$$

Napomena: T1 predstavlja rezultat merenja, a T2 definiše njegovu grešku.

Dokaz T2: Hajde da prvo razmotrimo karakteristike greške e :

- (i) e je slučajna promenljiva, jer je Ψ slučajan, a y deterministički,
- (ii) y i e su, na osnovu (i), međusobno nekorelisane veličine,
- (iii) $\bar{e} = 0$ koji sledi iz T1 i (i), jer je $\bar{e} = \bar{\Psi} - \bar{y} = 0$,
- (iv) $\Psi = y + e$ samim tim i na osnovu (i) i (ii):

$$\sigma_e^2 = \sigma_{\Psi}^2 - \sigma_y^2 \text{ tj. } \sigma_{\Psi}^2 = \sigma_y^2 + \sigma_e^2$$

Odredimo prvo σ_{Ψ}^2 :

$$\sigma_{\Psi}^2 = \overline{(\Psi - \bar{\Psi})^2} = \bar{\Psi}^2 - 2\bar{\Psi}\bar{\Psi} + \bar{\Psi}^2 = \bar{\Psi}^2 - \bar{\Psi}^2 = \bar{\Psi}^2 - \bar{y}^2 \quad (15)$$

Analogno:

$$\Psi^2 = \int_{-R}^R \Psi^2 \cdot dP_{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-R}^R \delta(y - f(t)) \cdot dy \int_{-g}^{+g} \Psi^2 \cdot \frac{dh}{2g} \quad (16)$$

Ako je $\Psi = 2g(b_1 - b_{-1})$ matematičkom indukcijom se lako dokazuje da je:

$$\Psi^l = [\text{sgn}(\Psi)]^l \cdot |\Psi| \cdot (2g)^{l-1} \quad (17)$$

gde je $\text{sgn}(\Psi)$ znak slučajne promenljive Ψ , a l je prirodan broj.

Na osnovu gornje relacije je: $\Psi^2 = |\Psi| \cdot 2g$, odakle je:

$$\overline{\Psi^2} = \frac{2g}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)| dt \quad (18)$$

i konačno:

$$\sigma_{\Psi}^2 = \frac{2g}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)| dt - \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \right]^2 \quad (19)$$

Odredimo dalje σ_y^2 :

Ako je t slučajna promenljiva uniformne raspodele $p(t) = \frac{1}{t_2 - t_1}$, onda je y takođe slučajna promenljiva, pa:

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 \quad (20)$$

$$\text{t.j. } \sigma_y^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \right]^2 \quad (21)$$

Konačno:

$$\sigma_e^2 = \sigma_{\Psi}^2 - \sigma_y^2 = \frac{2g}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)| dt - \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt$$

što je trebalo biti dokazano. Ovaj rezultat pokazuje kako varira greška merenja.

Veličina e je slučajna, i $\bar{e} = 0$, samim tim:

$$\sigma_e^2 = \overline{e^2} = \frac{2g}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)| dt - \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt$$

Dovoljan uslov za važenje izložene teorije, kao i centralne granične teoreme, je da je bilo koji treći momenat, uključujući i treći centralni momenat, ograničen:

$$\overline{e^3} = \overline{(e - \bar{e})^3} = M_3 \leq K$$

Teorema 3: Treći centralni momenat M_3 promenljive e je ograničen.

Dokaz T3: Treći centralni momenat je:

$$M_3 = \overline{e^3} = \overline{(\Psi - \bar{y})^3} = \overline{\Psi^3} - 3\overline{\Psi^2 \bar{y}} + 3\overline{\Psi \bar{y}^2} - \bar{y}^3 = \overline{\Psi^3} - 3\bar{y}\sigma_{\Psi}^2 - \bar{y}^3$$

$$M_3 = \overline{\Psi^3} - \bar{y} \cdot (3\sigma_{\Psi}^2 + \bar{y}^2) \Rightarrow M_3 \leq \left| \overline{\Psi^3} \right| + \left| \bar{y} \right| \cdot (3\sigma_{\Psi}^2 + \bar{y}^2)$$

Lako je primetiti da je $|\bar{y}| \leq R$ i $\sigma_\Psi^2 \leq R^2$, samo je nepoznato $|\overline{\Psi^3}|$. Na osnovu (17) je:

$$\begin{aligned}\Psi^3 &= (2g)^2 [\text{sgn}(\Psi)]^3 \cdot |\Psi| = (2g)^2 \cdot \Psi \\ \overline{\Psi^3} &= (2g)^2 \cdot \overline{\Psi} = (2g)^2 \cdot \bar{y} \leq (2g)^2 \cdot R = R^3\end{aligned}$$

pa za $Z=1$, iz čega sledi da je $R = 2g = a$, dobijamo:

$$M_3 \leq R^3 + 4R^3 = 5R^3 = 5 \cdot (2g)^3 = 40g^3 \quad (22)$$

čime je dokazana teorema T3. Na osnovu T3 i [4] na grešku pojedinačnog merenja moguće je primeniti centralnu graničnu teoremu i statističku teoriju uzoraka pa je:

$$\overline{\Psi} = \bar{y} + \bar{e} \quad (23)$$

Na osnovu T1 je $\overline{\Psi} = \bar{y}$, pa je $\bar{e} = 0$. Takođe važi i:

$$\sigma_{\overline{\Psi}}^2 = \sigma_y^2 + \sigma_e^2 \quad (24)$$

Kako je y deterministička promenljiva i veličina koja karakteriše signal, ona ne predstavlja grešku nego samo σ_e^2 . Prema tome, greška merenja je

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sigma_e^2}{N}} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{N}} \quad (*)$$

Pitanje je: "Koji je minimalan broj ravnomerno uzetih uzoraka neophodan da gornja procena važi?" Pogledajmo sa druge strane: "Koji je minimalan broj uzoraka na intervalu $t \in [t_1, t_2]$ neophodan, tako da diskretan skup uzoraka predstavlja funkciju $y = f(t)$?" Očigledno je da treba da se primeni Niquistov uslov.

Teorema 4: Potreban uslov da bi važila procena (*) greške merenja srednje vrednosti (integrala) funkcije $y = f(t)$ na intervalu $t \in [t_1, t_2]$ uređajem sa sl.5, je broj N definisan Niquist-ovim uslovom.

Dokaz T4: Pretpostavimo da imamo kontinualan signal (funkciju) koju možemo predstaviti trigonometrijskim polinomom n -tog stepena. Ukoliko signal nije periodičan možemo ga predstaviti kao periodičan signal sa prekidom prve vrste.

Pretpostavimo da uslov nije potreban i da signal možemo rekonstruisati kao $y = A_n \cdot \cos(n\omega t) + B_n \cdot \sin(n\omega t)$ odnosno da možemo zanemariti sve članove nižeg reda od n .

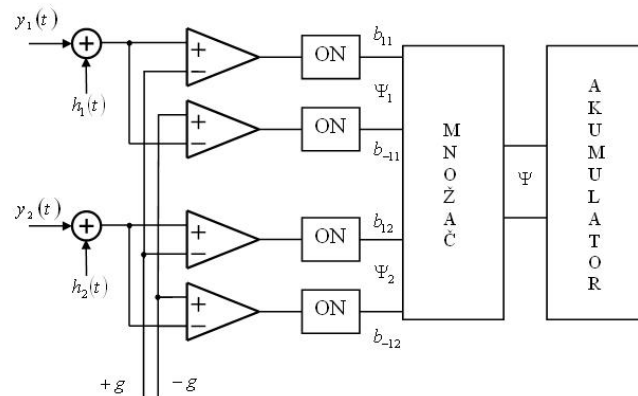
Uzmimo tada da je $f_s = n \cdot f$ i da je $t_2 - t_1 = L \cdot \frac{1}{f} = \frac{L}{f}$

gde je L velik ceo broj, pa je onda (zbog $k = \{1, 2, \dots, n\}$) Ln vrlo velik ceo broj, a nf je najviša učestanost u signalu.

Izvršimo rekonstrukciju na ovaj način dobijenog signala. Ako sa E označimo amplitudu n -tog (jedinog) harmonika, očigledno je da srednja vrednost kvadrata ovog signala može poprimiti sve vrednosti $\overline{y^2} \leq E^2$ (što nije jednoznačno i zavisi od početnog trenutka semplovanja). Pošto znamo da treba da dobijemo konstantu $\overline{y^2} = \frac{E^2}{2}$, time je teorema T4 dokazana kontradikcijom.

4. Merenje određenog integrala proizvoda dva signala

Pretpostavimo da imamo dva fleš A/D konvertora na sl.4, sa svojim ulazima $y_1 = f_1(t)$ i slučajnim signalom h_1 , i $y_2 = f_2(t)$ i h_2 , respektivno, i izlazima Ψ_1 i Ψ_2 . Ako uvedemo te izlaze u množač, kao što je prikazano na slici 7. Izlaz množača je: $\Psi = \Psi_1 \cdot \Psi_2$ i može da uzme vrednosti: $\Psi \in \{-(2g)^2, 0, +(2g)^2\}$



Sl.7. Dvo-bitni množač

Teorema 5: Neka su $y_1 = f_1(t)$ i $y_2 = f_2(t)$ ulazni signali u dva 2-bitna fleš A/D konvertora na kanalima I i II, čiji izlazi Ψ_1 i Ψ_2 odgovaraju množaču na sl. 7. Ako su slučajni uniformni signali h_1 i h_2 na kanalima I i II međusobno

nekorelisani, onda je, na vremenskom intervalu $T = t_2 - t_1$, izlaz srednje vrednosti množača, $\overline{\Psi}$ dat kao:

$$\overline{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot dt = \overline{y_1 \cdot y_2}$$

Dokaz T5: Ranije postavljen uslov za ulazni signal y i deterski signal h , ovde dodatno proširujemo u pogledu međusobne nezavisnosti deterskih signala h_1 i h_2 . Takođe treba imati u vidu da su vreme t i deterski signali h_1 i h_2 nezavisne promenljive, dok y_1 i y_2 zavise od vremena t . Analogno sa

dokazom T1, dobijamo da je: $\overline{\Psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi \cdot dP_{\Psi}$

Zbog: $dP_{\Psi} = dP_{y_1} \cdot dP_{y_2} \cdot dP_{h_1} \cdot dP_{h_2} = dP_{y_1/t} \cdot dP_{y_2/t} \cdot dP_t \cdot dP_{h_1} \cdot dP_{h_2}$

uzimajući u obzir da je:

$$\Psi = \Psi_1 \cdot \Psi_2, \quad dP_{y_1/t} = \delta[y_1 - f_1(t)] \cdot dy_1, \quad dP_{y_2/t} = \delta[y_2 - f_2(t)] \cdot dy_2$$

$$dP_t = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot dt, \quad dP_{h_1} = \frac{1}{2g} \cdot dh_1, \quad dP_{h_2} = \frac{1}{2g} \cdot dh_2$$

dobijamo:

$$dP_{\Psi} = \delta[y_1 - f_1(t)] \cdot \delta[y_2 - f_2(t)] \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{1}{(2g)^2} \cdot dy_1 \cdot dy_2 \cdot dt \cdot dh_1 \cdot dh_2$$

pa je matematičko očekivanje (srednja vrednost) veličine $\overline{\Psi}$ definisano kao:

$$\overline{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-2g}^{+2g} \delta[y_1 - f_1(t)] dy_1 \int_{-2g}^{+2g} \delta[y_2 - f_2(t)] dy_2 \int_{-g}^{+g} \Psi_1 \frac{dh_1}{2g} \int_{-g}^{+g} \Psi_2 \frac{dh_2}{2g}$$

U datom trenutku, signal je konstanta: $t = const \Rightarrow y_i = const$, dakle:

$$\int_{-g}^{+g} \Psi_i \cdot \frac{dh_i}{2g} = y_i, \quad i = 1, 2 \quad (25)$$

Otuda imamo izraz za srednju vrednost veličine $\overline{\Psi}$:

$$\overline{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-2g}^{+2g} \delta[y_1 - f_1(t)] \cdot y_1 \cdot dy_1 \int_{-2g}^{+2g} \delta[y_2 - f_2(t)] \cdot y_2 \cdot dy_2$$

t.j.

$$\overline{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot dt = \overline{y_1 \cdot y_2}$$

što je trebalo dokazati. Teorema 5. definiše merenu snagu signala.

Teorema 6: Ako je $\Psi = y_1 \cdot y_2 + e$ trenutna vrednost izlaza množača, gde je e greška merenja proizvoda, onda je varijansa greške e data kao:

$$\sigma_e^2 = \frac{(2g)^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t)f_2(t)| dt - \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t)f_2^2(t) dt$$

Dokaz T6: Analogno sa dokazom T2, $e = \Psi - y_1 \cdot y_2$:

- (i) e je slučajna promenljiva,
- (ii) Ψ i $y_1 \cdot y_2$ su međusobno nekorelisane promenljive,
- (iii) $\overline{e} = \overline{\Psi - y_1 \cdot y_2} = 0$,
- (iv) $\Psi = y_1 \cdot y_2 + e$, pa je $\sigma_\Psi^2 = \sigma_{y_1 y_2}^2 + \sigma_e^2$ t.j. $\sigma_e^2 = \sigma_\Psi^2 - \sigma_{y_1 y_2}^2$

Varijansa proizvoda je:

$$\begin{aligned} \sigma_\Psi^2 &= \overline{(\Psi - \overline{\Psi})^2} = \overline{\Psi^2} - 2\overline{\Psi\overline{\Psi}} + \overline{\overline{\Psi}^2} = \overline{\Psi^2} - \overline{\overline{\Psi}^2} \\ \sigma_\Psi^2 &= \overline{\Psi^2} - \overline{y_1 \cdot y_2}^2 \end{aligned} \quad (26)$$

Kako je $\overline{y_1 \cdot y_2}$ poznato iz teoreme 5, treba da se odredi samo $\overline{\Psi^2}$:

$$\overline{\Psi^2} = \overline{\Psi_1^2 \cdot \Psi_2^2} \quad (27)$$

$$\Psi_i^2 = (2g) \cdot |\Psi_i|, \quad i = 1, 2 \quad (28)$$

$$\overline{\Psi^2} = \overline{(2g)^2 \cdot |\Psi_1 \cdot \Psi_2|} \quad (29)$$

Po analogiji sa dokazom T5:

$$\overline{|\Psi_1 \cdot \Psi_2|} = \overline{|y_1 \cdot y_2|} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t)f_2(t)| dt \quad (30)$$

odakle je: $\sigma_\Psi^2 = \overline{\Psi^2} - \overline{y_1 \cdot y_2}^2$, odnosno:

$$\sigma_\Psi^2 = \frac{(2g)^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t)f_2(t)| dt - \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t) dt \right]^2 \quad (31)$$

Sa druge strane, na osnovu leme 3:

$$\sigma_{y_1 y_2}^2 = \overline{(y_1 \cdot y_2)^2} - \overline{y_1 \cdot y_2}^2 \quad (32)$$

tj.

$$\sigma_{y_1 y_2}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) f_2^2(t) dt - \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt \right]^2 \quad (33)$$

i dobija se sledeće:

$$\sigma_e^2 = \frac{(2g)^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t) f_2(t)| dt - \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) f_2^2(t) dt$$

što je trebalo dokazati. Teorema 6 pokazuje kako greška varira kada se koristi stohastički metod za merenje snage signala.

Teorema 7: Treći centralni momenat M_3 greške merenja e izlaza množača je ograničen: $M_3 \leq K$, gde je K realan pozitivan konačan broj.

Dokaz T7:

$$\begin{aligned} M_3 &= \overline{(e - \bar{e})^3} = \bar{e}^3 = \overline{(\Psi - \overline{y_1 \cdot y_2})^3} \\ M_3 &= \overline{\Psi^3} - 3\overline{\Psi^2} \cdot \overline{y_1 \cdot y_2} + 3\overline{\Psi} \cdot \overline{y_1 \cdot y_2}^2 - \overline{y_1 \cdot y_2}^3 \\ M_3 &\leq \left| \overline{\Psi^3} \right| + 3 \left| \overline{\Psi^2} \right| \cdot \left| \overline{y_1 \cdot y_2} \right| + 3 \left| \overline{\Psi} \right| \cdot \left| \overline{y_1 \cdot y_2} \right|^2 + \left| \overline{y_1 \cdot y_2} \right|^3 \end{aligned} \quad (34)$$

U gore navedenom odnosu poznate su sve vrednosti osim $\left| \overline{\Psi^3} \right|$. Kako je:

$$\begin{aligned} \left| \overline{\Psi^3} \right| &= 3 \left| \overline{\Psi_1^3 \cdot \Psi_2^3} \right| = \overline{(2g)^2 \Psi_1 \cdot (2g)^2 \Psi_2} = (2g)^4 \overline{\Psi_1 \cdot \Psi_2} \\ \left| \overline{\Psi^3} \right| &= (2g)^4 \overline{y_1 \cdot y_2} \end{aligned} \quad (35)$$

vredi $M_3 \leq (2g)^6 + 3 \cdot (2g)^6 + 3 \cdot (2g)^6 + (2g)^6 = 8 \cdot (2g)^6$ čime je dokazana T7.

Posledica 1. Teoreme 7: I centralna granična teorema i teorija uzoraka, važe za veličinu e , pa je za diskretna merenja:

$$\sigma_e^2 = \frac{\sigma_e^2}{N} \quad (36)$$

gde je N broj uzoraka u vremenskom intervalu $T = t_2 - t_1$.

Posledica 2. Teoreme 7: Procena (36) je tačna ako diskretni skupovi uzoraka $\Psi_1 \in \{\Psi_1(1), \Psi_1(2), \dots, \Psi_1(N)\}$ i $\Psi_2 \in \{\Psi_2(1), \Psi_2(2), \dots, \Psi_2(N)\}$ mogu da predstavljaju funkcije $y_1 = f_1(t)$ i $y_2 = f_2(t)$, što znači da je zadovoljena teorema uzorkovanja, odnosno Niquistovi uslovi u pogledu uniformnog uzorkovanja signala y_1 i y_2 .

Teoreme T5, T6 i T7 se mogu generalizovati za proizvod M signala, i u tom slučaju vredi:

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \dots \cdot f_M(t) \cdot dt \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \frac{(2g)^M}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t) f_2(t) \cdot \dots \cdot f_M(t)| \cdot dt - \\ &\quad - \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) f_2^2(t) \cdot \dots \cdot f_M^2(t) \cdot dt \end{aligned} \quad (38)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\sigma_e^2}{N} \quad (39)$$

U digitalnom merenju, srednja merena vrednost je:

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \Psi_1(i) \cdot \Psi_2(i) \cdot \dots \cdot \Psi_M(i) \quad (40)$$

Opšti slučaj za određivanje merne nesigurnosti izraza (40) dobija se generalizacijom teorema T5, T6 i T7.

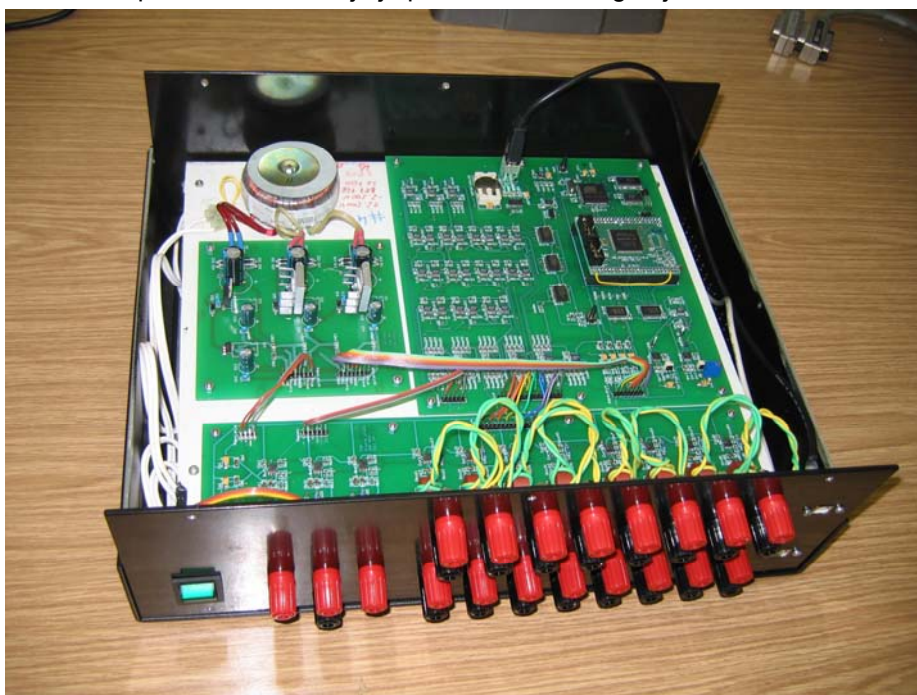
5. Diskusija i praktična realizacija uređaja

Dvobitni AD konvertor ima jednostavan hardver, čime je omogućeno jednostavno merenje signala, kao i realizacija paralelnih merenja, bez uticaja na brzinu konverzije, preciznost i tačnost merenja. Pošto rezultat AD konverzije može da poprmi samo vrednosti iz skupa $\{-1, 0, +1\}$, jednostavne su i operacije nad odmercima i njihova paralelna obrada. Algoritme merenja efektivne vrednosti napona, struje, aktivne snage itd. ne izvršava procesor nego jednostavan paralelni hardver kako je prikazano na sl.5. i sl.7. Pri obradi se koristi jednostavno digitalno filtriranje, pa se ono svodi na sabiranje i oduzimanje koeficijenata filtra. Primetimo da nema množenja, najkomplicovanije i vremenski najzahtevnije operacije u digitalnom filtriranju. Pokazuje se da se korišćenjem digitalnog filtriranja može jednostavno i

precizno mereriti frekvencija mrežnog napona i struje i meriti njihov fazni pomak i faktor izobličenja, a praktične realizacije su izuzetno jednostavne, pouzdane i brze.

Kod merenja na elektrodistributivnoj mreži, ako je učestanost mrežnog napona 50Hz, onda je učestanost mrežne snage i snage signala napona i struje 100Hz, pa je najkraći vremenski interval u kome ima smisla meriti 10ms. Najkraći vremenski interval definišu dva uzastopna prolaska kroz nulu osnovnog harmonika napona, a za bilo koji drugi vremenski interval se uzima celobrojni umnožak najkraćeg vremenskog intervala. Pošto se istovremeno odvijaju i merenje i obrada signala, na kraju definisanog vremenskog intervala, upravo u trenutku kad se on završava, na rasplaganju su svi rezultati, praktično bez ikakvog kašnjenja.

Jedna praktična realizacija je prikazana na fotografiji, na slici 8.



Sl.8. Četvorostruki trofazni analizator snage

Fotografija prikazuje četvorostruki trofazni analizator snage, koji na opisanom principu meri 16 efektivnih vrednosti struja, tri efektivne vrednosti napona, faktore izobličenja tri fazna napona, 12 aktivnih snaga, 3 frekvencije i preko stotinu izvedenih veličina sa promenljivom rezolucijom u vremenu i po vrednosti i osnovnom tačnošću 0,2% od opsega (FS – Full Scale). Od 20.09.2011. u jednoj NN trafostanici „Elektrovojvodine“ (TS „Školska“ – Veternik) neprekidno radi, bez i jednog otkaza, opisani uređaj koji se daljinski kontroliše.

6. Zaključak

U prezentovanoj teoriji, nema pretpostavke o talasnom obliku signala koji se meri dvobitnim fleš A/D konvertorom. Iz relacija (37) i (38) može se videti da talasni oblik signala direktno utiče i na merenu veličinu (integral proizvoda) i na njenu standardnu devijaciju (preciznost). Prema tome, ako je nepoznat talasni oblik signala koji se meri, standardna devijacija, odnosno preciznost sa kojom se meri signal, ne može se izračunati. Ako su, međutim, zadovoljeni uslovi teoreme o odabiranju, onda će diterovani dvobitni uzorci sadržati dovoljno informacija o talasnom obliku merenog signala i moguće je da se vrlo precizno odredi standardna devijacija merenja integrala proizvoda signala [7]. Kao što se može videti iz jednačine (31) i teoreme 6, konvencionalna obrada rezultata merenja ne daje tačnu vrednost standardne devijacije. Teorema 6. daje tačan rezultat, ali jednačina (31) daje netačan rezultat, iako se čini logična i standardna.

Ovaj rad teorijski dokazuje mogućnost veoma tačnog i preciznog merenja određenog integrala proizvoda dva ili više signala pomoću dvobitnog fleš A/D konvertora. U [1] je potvrđen ovaj metod i simulacijom i eksperimentom. Matematika prikazana u radu je originalna, specijalno razvijena za ovu namenu. Najvažnija ideja je tretiranje vremena u okviru intervala integracije kao nezavisne uniformne slučajne promenljive. I merena vrednost i njena preciznost veoma zavise od talasnog oblika merenog signala. Međutim, ako su ispunjeni uslovi teoreme o odabiranju, merena vrednost i merna nesigurnost mogu se precizno utvrditi, bez obzira na talasni oblik signala.

Teorija izložena u ovom radu je potvrđena brojnim simulacijama i kalibracijom niza razvijenih uređaja od kojih je poslednji četvotostruki trofazni analizator snage realizovan 2011. godine.

Literatura

- [1] V.V. Vujicic, I. Zupunski, Z. Mitrovic and M.A. Sokola, "Measurement in a point versus measurement over an interval." *Proc. of the IMEKO XIX World Congress*; Lisbon, Portugal. Sep. 2009. pp. 1128-1132 no. 480
- [2] D. Pejić, M. Urekar, V. Vujičić and S. Avramov-Zamurović, "Comparator offset error suppression in stochastic converters used in a watt-hour meter." , in *Proc. CPEM 2010, Proceedings*; Korea. June 2010.
- [3] V. Pjevalica and V.V. Vujicic, "Further Generalization of the Low-Frequency True-RMS Instrument." *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 59, no. 3, March 2010. pp. 736-744.
- [4] V. Vranić, *Probability and statistics*. Zagreb: Tehnička knjiga. 1965. (in Croatian).

- [5] B.M. Santrac, M.A. Sokola, Z. Mitrovic, I. Zupunski and V.V. Vujicic, "A Novel Method for Stochastic Measurement of Harmonics at Low Signal-to-Noise Ratio." *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 58, no. 10, pp. 3434-3441, Oct. 2009.
- [6] M.F. Wagdy and W. Ng, "Validity of uniform quantization error model for sinusoidal signals without and with dither." *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 38, no. 3, June 1989. pp.718-722, doi: 10.1109/19.32180
- [7] I. Zupunski, V.V. Vujicic, Z. Mitrovic, S. Milovancev and M. Pesaljevic, "On-line determination of the measurement uncertainty of the stochastic measurement method." *Proc. of the IMEKO XIX World Congress*; Lisbon, Portugal, Sep. 2009, pp. 1048-1051 no. 278.

Abstract: This paper presents the two-bit stochastic converter theory of operation. This converter could be used for the precise measurement of the effective (root-mean-square) value of voltage, current, electric power or energy and thus, could be applicable to grid measurements. The key contribution of this paper is the theoretical derivation of error limits when measuring signals using the stochastic method. Standard deviation of measured value over a specified measuring period is defined as an error. When finding expressions for the measured quantity and its error, time is treated as an independent uniform random variable; therefore, probability theory and statistical theory of samples can be applied. This condition is necessary because the presented problem is highly nonlinear and stochastic and thus, cannot be solved by the linear theory of discrete signals and systems, or by the theory of random processes. The presented solution is generalised in order to include the measurements of the definite integral of the product of a finite number of signals.

Keywords: Analogue-digital conversion, Dither techniques, Sampling methods, Probability, Statistics

Measurement of Definite Integral Product of Two or More Signals using Two-Bit ADCs